

PROCESOS ESPACIALES NO-ESTACIONARIOS:
DEFORMACIÓN DEL ESPACIO

Presentado Por:

FABIO HUMBERTO SEPÚLVEDA MURILLO

TRABAJO PRESENTADO COMO
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO
DE MÁSTER EN ESTADÍSTICA APLICADA

DIRECTOR : DR. JOSÉ MIGUEL ANGULO I.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E
INVESTIGACIÓN OPERATIVA

2012

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. Estadística Espacial | 3 |
| 1.3. Transformaciones para Procesos No estacionarios | 8 |
| 2. Deformación Espacial | 13 |
| 2.1. Deformación Espacial | 14 |
| 2.2. Escalamiento Multidimensional | 15 |
| 2.3. Algoritmo Thin-Plate Spline (TPS) | 17 |
| 2.4. Descripción del Método | 21 |
| 3. Aplicación | 25 |
| 3.1. Simulación de un Campo no Estacionario | 25 |
| 3.2. Presentación de los Datos y Deformación Espacial | 29 |
| 4. Trabajos Futuros | 32 |
| 4.1. Trabajos Futuros | 32 |
| Bibliografía | 33 |

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

El uso de la naturaleza de la información impide aplicar muchas de las herramientas convencionales existentes en estadística espacial, dado que no cumplen con los supuestos necesarios. Por ejemplo, la estacionariedad que es una de las hipótesis con mayor frecuencia a considerarse en diferentes situaciones y que no es realista en muchos de estos problemas. En las últimas décadas se han venido desarrollando diferentes metodologías estadísticas para el análisis de datos con diferentes características, especialmente para el tratamiento de los procesos espaciales no estacionarios pertenecientes a la ciencia ambiental.

Una de las herramientas utilizadas para el modelaje de la estructura de la covarianza espacial no estacionaria es la deformación del espacio. La aproximación a partir de la deformación del espacio ha tenido dos aplicaciones primordiales para el modelado de la estructura de la covarianza no estacionaria o no homogénea de un campo aleatorio. La primera es en el análisis de imágenes, donde un modelo de imagen es usado como referencia para la aproximación basada en una deformación del dominio

espacial. Por ejemplo Glasbey y Mardia (1998), ellos plantean que la escogencia de la deformación representa un compromiso entre una distorsión suave y una que consiga un buena correspondencia, y para ello asumen los métodos, paramétricos y no paramétricos para la deformación. Estos mismos en el 2001, abordaron el tema de cómo elegir la función de la deformación. Mardia et al. (2006), trabajaron sobre el problema del efecto de distorsión producido por diferentes tipos de estrategias de deformación no lineal. Entre otros. Segunda, la deformación espacial se ha usado para ajustar campos aleatorios homogéneos e isotrópicos a datos espaciales que presentan ausencia de esta característica. Este último trabajo ha sido considerado por varios autores desde su aparición presentado por Sampson y Guttorp (1992), donde proporcionan una aproximación no paramétrica para la estimación global de la estructura de la covarianza espacial, basada en la técnica de escalamiento multidimensional para modelar la función de correlación del campo aleatorio dada por

$$r(x, y) = \rho(| \Phi(y) - \Phi(x) |)$$

donde, ρ es una función de correlación isotrópica y Φ es una deformación biyectiva. Perrin y Meiring (1998), estudiaron la unicidad de las funciones ρ y Φ . Vale destacar que Sampson y Guttorp (1992) hacen referencia únicamente a la función de correlación isotrópica irreducible, Perrin y Senoussi (1999) además de esta característica también estudian la reducibilidad estacionaria, es decir, consideran a r como

$$r(x, y) = h(\Phi(y) - \Phi(x))$$

donde, h es una función de correlación estacionaria. Un enfoque Bayesiano para la deformación espacial es presentado por Damian et al. (2001, 2003).

Clerc y Mallat (2003), hacen un trabajo inverso, parten de la deformación de un proceso estacionario para estudiar las clases de procesos no estacionarios. Anderes y Stein (2008), proporcionan una nueva aproximación para la estimación de la deformación de un campo aleatorio Gaussiano isotrópico en el caso de una realización de un proceso espacial.

El objetivo de este trabajo es estudiar el modelaje de la estructura de la covarianza espacial no-estacionaria mediante la deformación del espacio desde el punto de vista de Sampson y Guttorp, y finalmente se da una aplicación de esta técnica.

En el resto de este capítulo se citan definiciones necesarias para una mejor comprensión del tema y se da una síntesis de otros métodos usados para el tratamiento de la no estacionariedad. En el capítulo 2 se estudia la deformación del espacio y se explica los diferentes pasos a seguir para la construcción del modelo. Finalmente, en el capítulo 3 se presenta una aplicación del método, particularmente a partir de la representación de una red ortogonal con el uso del paquete estadístico R.

1.2. Estadística Espacial

La estadística espacial es toda una colección de metodologías convenientes para el análisis de datos que corresponden a la medición de variables aleatorias en diversos sitios de una región.

1.2.1. Dato Espacial

Se entiende por dato espacial por aquel valor de la variable de interés donde adicionalmente se registra el sitio donde este ocurre.

Cuando se trabaja con datos espaciales nos hace recordar la primera ley de la geografía: "Todo tiene relación con todo, pero las cosas cercanas están mas relacionadas que las lejanas", es decir, que las las observaciones cercanas están correlacionadas, invalidando las técnicas estadísticas convencionales donde los fenómenos se estudian bajo el supuesto de independencia y por ello es indispensable usar herramientas de análisis que contemplen dicha estructura.

1.2.2. Áreas de la Estadística Espacial

La estadística espacial se divide en tres grandes áreas, a saber: la Geoestadística, lattices y patrones espaciales.

Para más detalles de cada una de estas áreas ver a Matheron (1971), padre de la Geoestadística y Cressie (1991).

1.2.3. Campo Aleatorio

Definición 1.2.1. (Proceso Estocástico) Es una familia de variables aleatorias $\{Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, τ, P) . El conjunto D de índices del proceso se denomina espacio de parámetros. Los valores que toma $Z(s)$ se llaman estados y el conjunto de todos los posibles valores de $Z(s)$ se llama espacio de estados.

Al proceso estocástico $\{Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^n\}$, donde s es un sitio del espacio también se le denomina *proceso aleatorio o campo aleatorio*. Además, si $Z(s)$ es un vector aleatorio, el proceso se le llama en el contexto espacial *proceso aleatorio multivariable o campo aleatorio multivariable*.

Las áreas de la estadística espacial difieren por las características del conjunto D , (discreto o continuo).

Formalmente, podemos decir que la estadística espacial trata con el análisis de realizaciones de un proceso estocástico $\{Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^n\}$, en el que s es la ubicación en el espacio euclidiano n -dimensional y $Z(s)$ es una variable aleatoria en la ubicación s . En particular, cuando $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ representa un dominio en el espacio-tiempo, se suele hablar de *procesos espacio-temporales*, o simplemente de *procesos espaciales* cuando no está presente la dimensión temporal.

1.2.4. Variable Regionalizada

Un proceso estocástico $\{Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^n\}$, donde el espacio de estados y el espacio de parámetros es continuo, es decir, que las variables aleatorias $Z(s)$ son continuas y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto continuo, Mathe-ron denominó *variable regionalizada*.

1.2.5. Momentos de una Variable Regionalizada

Sea un proceso estocástico $\{Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^n\}$, que define una variable regionalizada. Para n puntos cualesquiera x_1, x_2, \dots, x_n el vector aleatorio $(Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n))$ está definido por su función de distribución conjunta:

$$F[z_1, z_2, \dots, z_n] = P[Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2, \dots, Z(x_n) \leq z_n] \quad (1.1)$$

Conocidas las densidades marginales univariadas y bivariadas se pueden establecer los siguientes valores esperados:

- $E[Z(x_i)] = m(x_i)$, función media o deriva.
- $V[Z(x_i)] = E[Z(x_i) - m(x_i)]^2 = \sigma_i^2$

- $C[Z(x_i), Z(x_j)] = E\{[Z(x_i) - m(x_i)][Z(x_j) - m(x_j)]\}$, función de autocovarianza.
- $\gamma[Z(x_i), Z(x_j)] = \frac{1}{2}E[Z(x_i) - Z(x_j)]^2$, función de semivarianza.

1.2.6. Campos Aleatorios Estacionarios

Se dice que un campo aleatorio es estrictamente estacionario, si su función de distribución conjunta es invariante respecto a traslaciones del vector \mathbf{h} , o lo que es lo mismo, la función de distribución del vector aleatorio $(Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n))$ es idéntica a la del vector $(Z(x_1 + \mathbf{h}), Z(x_2 + \mathbf{h}), \dots, Z(x_n + \mathbf{h}))$ para cualquier \mathbf{h} .

La teoría geoestadística se basa en los momentos descritos anteriormente y la hipótesis de estacionariedad se define en términos de los siguientes momentos:

Estacionariedad de Segundo Orden

Sea $\{Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ una variable regionalizada. Se dice que $Z(s)$ es estacionario de *segundo orden*, si:

- $E[Z(s)] = \mu, \forall s \in D \subset \mathbb{R}^n$. Es decir, el valor esperado de la variable aleatoria es finito y constante para todo punto del dominio.
- $C[Z(s), Z(s + h)] = C(h) < \infty$. Es decir, para toda pareja de variables aleatorias $Z(s), Z(s + h)$ su covarianza existe y sólo depende del vector de separación h .

La existencia de la covarianza implica que la varianza existe, es finita y no depende de h , es decir, $V[Z(x_i)] = C(0) = \sigma^2$.

1.2.7. Isotropía

Un campo aleatorio $Z(s)$ sobre \mathbb{R}^k es estrictamente isotrópico si y sólo si sus distribuciones conjuntas finitas son invariantes bajo todos los movimientos rígidos. Esto es, para cualquier matriz ortogonal \mathbf{H} de $k \times k$ y cualquier $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$ tales que

$$\begin{aligned} P\{Z(\mathbf{H}\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}) \leq t_1, \dots, Z(\mathbf{H}\mathbf{s}_n + \mathbf{s}) \leq t_n\} \\ = P\{Z(\mathbf{s}_1) \leq t_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n) \leq t_n\} \end{aligned}$$

para todo n finito, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^k$ y $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Stein(1999).

Un campo aleatorio $Z(s)$ sobre \mathbb{R}^k es débilmente isotrópico, si

1. Existe una constante μ tal que $E(x) = \mu$, para todo $x \in \mathbb{R}^k$, y
2. Existe la covarianza para toda pareja de variables $Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s}+\mathbf{h})$ y es una función C no negativa tal que depende de la magnitud del vector \mathbf{h} , esto es,

$$C(\mathbf{s}, \mathbf{s}+\mathbf{h}) = E\{Z(\mathbf{s})Z(\mathbf{s}+\mathbf{h})\} - \mu^2 = C(\|\mathbf{h}\|)$$

para todo $\mathbf{s}, \mathbf{s}+\mathbf{h} \in \mathbb{R}^k$. La función $C(\|\mathbf{h}\|)$ recibe el nombre de función de autocovarianza isotrópica para Z .

La condición de isotropía equivale a suponer que no existe razón para distinguir una dirección de otra para el estudio del campo aleatorio bajo consideración.

Como conclusión se puede decir que la estacionariedad significa que el campo aleatorio es idéntico en diferentes partes del dominio. Además, la estacionariedad y la isotropía son propiedades de invarianza, la estacionariedad es invariante bajo la traslación y la isotropía es invariante bajo rotaciones y reflexiones.

1.3. Transformaciones para Procesos No estacionarios

Existe un amplio estudio encargado al modelado de la covarianza espacial bajo el supuesto de estacionariedad intrínseca (en el área de la geoestadística), es decir, el estudio amplio de la función de semivarianza (semivariograma). Pero en muchas ocasiones reales, por ejemplo en procesos ambientales se tiene una estructura de covarianza no estacionaria (heterogénea), sobre todo cuando se considera escalas espaciales suficientemente grandes.

Los primeros estudios para el tratamiento de la estructura de la covarianza espacial no estacionariedad se remontan a los años 80's, unos de los representantes en este campo son Obley y Creutin (1986), que para el análisis espacial utilizaron el método de las funciones Ortogonales empíricas, en Inglés, empirical orthogonal functions, ellos estudiaron la relación con el análisis de componentes principales, que en últimas es la descomposición de la matriz de datos espacio-temporal. Más adelante Haas (1990) introduce una técnica llamada de Ventana móvil, en Inglés, Moving Windows, donde la covarianza espacial es estimada en una ventana circular sobre cada punto objetivo, en la cual un estimador espacial (Kriging) es calculado. Esta herramienta estima la estructura de la covarianza localmente sin proporcionar una estimación global.

A continuación se citan en forma de síntesis las diferentes aproximaciones que se han desarrollado desde finales de los 90's, con el objeto de estudiar procesos espacialmente no estacionarios. Dejando una de ellas (deformación espacial) para estudiarla formalmente en el próximo capítulo.

1.3.1. Modelos de Funciones de Base

El tratamiento de la estructura de la covarianza no estacionaria en campos aleatorios espacio-temporales, basados en la descomposición de dichos procesos en términos de funciones ortogonales empíricas, ha recibido una atención en los trabajos de Nychka y Saltzman (1998), Holland et al., (1998) y Nychka et al., (2002).

Consideremos un proceso espacio-temporal y sea \mathbf{C} la matriz de covarianza empírica de tamaño $n \times n$, computada para los sitios $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ que puede ser escrita a partir de la siguiente descomposición espectral dada por

$$S = F^T \Lambda F = \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i F_i F_i^T, \quad (1.2)$$

donde $n_T = \min(n, T)$. Para el caso espacial continuo la función de covarianza esta dada por

$$C(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i F_i(x) F_i(y), \quad (1.3)$$

donde las funciones propias $F_i(x)$ representan las soluciones de la ecuación integral de Fredholm y la correspondiente descomposición de Karhunen Loève del campo como

$$Y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) F_i(x). \quad (1.4)$$

El objetivo es calcular una aproximación numérica a la ecuación integral de Fredholm, o equivalente, a seleccionar un conjunto de funciones generadoras $e_1(x), e_2, \dots, e_p(x)$ que son la base para una extensión de los vectores propios finitos a las funciones propias $F_i(x)$. Para más detalles ver a Guttorp and Sampson (1994), Creutin and Obled (1982), Obled and Creutin (1986).

1.3.2. Métodos de Suavizado y Kernel

Se considera la aproximación más sencilla para tratar la estructura de la covarianza espacial no estacionaria. Fuentes, Nott y Dunsmuir representaron la estructura de la covarianza espacial en términos de combinaciones ponderadas espacialmente de funciones de covarianza espacial estacionarias y suponen que representan la estructura de la covarianza local en diferentes regiones. Inicialmente, consideremos la división del dominio espacial D en k subregiones s_i , cada una con un número suficiente de puntos para estimar un variograma estacionario o la función de covarianza espacial localmente. Fuentes (2001) representa el proceso espacial $Y(s)$ como una media ponderada de procesos estacionarios ortogonales locales:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^k w_i(s) Y(s_i), \quad (1.5)$$

donde $w_i(s)$ es una función de peso elegida como la inversa de la distancia al cuadrado entre s y el centro de la subregión s_i . La estructura de la covarianza espacial no estacionaria está dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y(s), Y(u)) &= \sum_{i=1}^k w_i(s) w_i(u) \text{Cov}(Y_i(s), Y_i(u)) \\ &= \sum_{i=1}^k w_i(s) w_i(u) C_{\theta_i}(s - u) \end{aligned}$$

donde $C_{\theta_i}(s - u)$ representa un función de covarianza espacial estacionaria. La descomposición finita $Y(x)$ dada por Fuentes (2001), Fuentes y Smith (2001) la extendieron a una convolución continua de procesos estacionarios locales:

$$Y(x) = \int_D w(x - s) Y_{\theta(s)}(x) ds. \quad (1.6)$$

La anterior estimación requiere que el campo espacial de vectores de parámetros $\theta(s)$ y el proceso Gaussiano estacionario sea obligado a variar suavemente. Las integrales (1.7) y las representaciones espectral de la covarianza espacial son aproximadas con sumas discretas involucrando k sitios espaciales independientes s_i y los correspondientes procesos $Y_{\theta_i(s)}$, como en la ecuación (1.6).

Guillot et al. (2001) propusieron un estimador kernel similar al introducido por Oehlert (1993), aunque ellos no citan este trabajo previo. En efecto, sean D el dominio espacial y $C(x, y)$ la función de covarianza definida sobre $D \times D$ y supongamos una matriz de covarianzas $C = [c_{ij}]$ computada para los sitios $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Define un Kernel no negativo K integrando sobre $D \times D$, $K_\epsilon(u, v) = \epsilon^{-4}K(u/\epsilon, v/\epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$. Entonces, define una partición $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ de D . Luego, el estimador no estacionario no paramétrico de C obtenido por la regularización de C está dado por

$$\hat{C}(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} \int_{D_i \times D_j} K_\epsilon(x - u, y - v) dudv. \quad (1.7)$$

1.3.3. Modelos de Procesos de Convolución

Para estimar la estructura de la covarianza espacial no estacionaria Higdon (1998) introdujo un proceso de convolución, donde considera el hecho de que cualquier proceso Gaussiano estacionario $Z(s)$ con correlograma $\rho(d) = \int_{\mathbb{R}^2} k(s)k(s - d)ds$ puede ser expresado como la convolución de un proceso Gaussiano con ruido blanco $\zeta(s)$ con kernel $k(s)$,

$$Y(s) = \int_{\mathbb{R}^2} k(s - u)\zeta(u)du. \quad (1.8)$$

Para la elección de una función de densidad Gaussiana bivariada con matriz de covarianza Σ de 2×2 para el kernel, se traduce en procesos con funciones de correlación Gaussiana estacionaria anisotrópica con el eje principal de Σ determinando las direcciones de la estructura anisotrópica. Para explicar la no estacionariedad, Higdon (1998) y Higdon et al. (1999) varía suavemente el kernel con la ubicación espacial. Sea $k_s(\cdot)$ un kernel centrado en el punto s , en función de s , la correlación entre dos puntos s y s' está dada por

$$\rho(s, s') = \int_{\mathbb{R}^2} k_s(u) k_{s'}(u) du. \quad (1.9)$$

Higdon et al. (1999) demostraron un caso particular donde los $k_s(\cdot)$ son densidades Gaussianas bivariadas caracterizadas por la forma de elipses que se basan en matrices de covarianza de 2×2 .

Más adelante, Paciorek y Schervish (2006) ampliaron esta aproximación y crearon una clase de funciones de covarianza no estacionaria de forma cerrada, incluyendo una covarianza Matérn no estacionaria parametrizada por variar espacialmente los parámetros de covarianza en términos de una descomposición propia de la matriz de covarianza del kernel $k_s(\cdot)$.

Calder y Cressie (2007) estudiaron varios temas asociados con el modelado, aprovechando los avances tecnológico para el tratamiento de grandes conjuntos de datos. Calder (2007,2008) extendió la aproximación a la convolución de procesos dinámicos para monitorear datos espacio temporales multivariados.

D'Hondt et al. (2007) aplica el modelo de proceso de convolución con kernels Gaussianos a la textura anisotrópica no estacionaria en las imágenes de radar de apertura sintética (SAR).

Capítulo 2

Deformación Espacial

Muchas de las técnicas trabajadas para la estimación de la estructura de la covarianza han sido paramétricas y tienen como supuesto fundamental la estacionariedad e isotropía (en el área de Geoestadística), y en aplicaciones ambientales estas características con frecuencia no se cumplen o se cumplen para áreas pequeñas. Un buen representante para el tratamiento de fenómenos que se suponen tener estas cualidades es Matérn (1960).

En este capítulo se presenta una aproximación no paramétrica para la estimación de la covarianza espacial y no asume estacionariedad ni isotropía, mediante deformaciones de un sistema de coordenadas geográficas que fue expuesto por Sampson y Guttorp (1992). Para la implementación de esta aproximación requiere de dos herramientas: la primera, el escalamiento multidimensional y la segunda la interpolación Thin-plate splines (TPS).

Antes de presentar el método de interés para el estudio de la covarianza espacial no estacionaria, presentamos la definición formal de deformación espacial y luego describimos las herramientas necesarias para comprender dicho método.

2.1. Deformación Espacial

Definición 2.1.1. Sea X un campo aleatorio sobre $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Una deformación espacial es una transformación $\Phi : D \rightarrow D' \subseteq \mathbb{R}^n$ uno a uno con jacobiano positivo, $|J_\Phi| > 0$.

El nuevo plano formado a partir de la transformación Φ es considerado estacionario e isotrópico.

Arad et al (1994), propusieron las funciones de base radial para representar las superficies. En la literatura son bien conocidas las siguientes funciones:

$$U_1(r) = r^2 \log r^2 \quad (\text{Thin-plate splines})$$

$$U_2(r) = \exp(-r^2/2\sigma^2) \quad (\text{Densidad Gaussiana})$$

$$U_3(r) = (r^2 + t_0^2)^\alpha, \quad t_0 = 2.0, \quad \alpha = 0.4 \quad (\text{Potencia})$$

$$U_4(r) = \log(\sqrt{r^2 + t_0^2}), \quad t_0 = 2.0 \quad (\text{Shifted log})$$

Entonces, una deformación sobre \mathbb{R}^2 la podemos escribir como

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

donde f_x y f_y están dadas por

$$f_x(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^n \lambda_i U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|) \quad y$$

$$f_y(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + \sum_{i=1}^n \mu_i U(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|),$$

y donde las \mathbf{x}_i son puntos del plano Euclidiano.

Para el objetivo del trabajo se utilizará la función $U(r) = r^2 \log r^2$ (Thin-plate splines).

2.2. Escalamiento Multidimensional

El escalamiento multidimensional, más conocido como *Multidimensional Scaling (MDS)* es una técnica multivariada de interdependencia que trata de representar en un espacio geométrico de pocas dimensiones las proximidades existentes entre un conjunto de objetos. El MDS es apropiado para el trabajo de diferentes tipos de datos de entrada, tales como: tablas de contingencia, matrices de proximidad, correlaciones, entre otros. El MDS toma como entrada una matriz de proximidades Δ de tamaño $n \times n$, donde n es el número de objetos y δ_{ij} de Δ es la proximidad entre el objeto i y j .

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz Δ , el MDS entrega como salida una matriz X de tamaño $n \times m$, donde n indica el número de objetos y m representa el número de dimensiones. De la matriz X se calcula la matriz de distancias D de tamaño $n \times n$, donde cada entrada d_{ij} representa la distancia entre los objetos i y j .

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

La solución entregada por el MDS es tal que haya la máxima correspondencia entre la matriz de proximidades inicial Δ y la matriz de distancias D .

Existen dos modelos de MDS, a saber: el modelo de escalamiento métrico y el modelo de escalamiento no métrico.

1. Modelo de Escalamiento Métrico: Aquí se consideran que los datos están medidos en escala de razón o de intervalo. En este modelo se parte del supuesto que la relación existente entre las proximidades y las distancias es lineal.
2. Modelo de Escalamiento no Métrico: En este modelo se considera que los datos están medidos en escala ordinal. El modelo de escalamiento no métrico no supone una relación lineal entre las proximidades y las distancias, sino que establece una relación monótona creciente entre ambas. Su desarrollo se debe a Shepard y Kruskal.

Sobre la bondad del modelo se determina un coeficiente denominado *stress*. En efecto, dado que las distancias son una función de las proximidades, es decir, $f(\delta_{ij}) = d_{ij}$, generalmente $f(\delta_{ij}) \approx d_{ij}$, esto nos deja un margen de error y se puede calcular el error cuadrático:

$$e_{ij}^2 = (f(\delta_{ij}) - d_{ij})^2 \quad (2.1)$$

Entonces se tiene como medida para la bondad de ajuste el *stress* definido por:

$$stress = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} e_{ij}^2}{\sum_{i,j} d_{ij}^2}} \quad (2.2)$$

Es claro que a mayor diferencia entre las disparidades y las distancias, mayor será el *stress*, luego el objetivo es minimizar dicha expresión.

Kruskal sugiere las siguientes interpretaciones del *stress*:

- 0.2 (Pobre)
- 0.1 (Aceptable)

- 0.05 (Bueno)
- 0.025 (Aceptable)
- 0.0 (Excelente)

2.3. Algoritmo Thin-Plate Spline (TPS)

El nombre de *thin-plate spline* fue introducido por Bookstein para referirse a la flexión (doblado, plegado) de una hoja delgada de metal.

Como consecuencia de la aplicación de TPS es dos funciones bidimensionales una para el eje X y otra para el eje Y , $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$, respectivamente. Estas son globalmente suaves y fácilmente de calcular. Las *thin-plate spline* son análogas a las spline cúbicas en una dimensión y estas son la solución fundamental de la ecuación bi-armónica:

$$z(x, y) = U(r) = r^2 \log r^2 \quad (2.3)$$

donde r es la distancia desde el origen al punto (x, y) . Además, tiene su medida de rugosidad que minimiza la energía de torsión (bending energy) necesaria de la deformación de la hoja de metal y está dada por:

$$\int \int_{R^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy. \quad (2.4)$$

A continuación se describe el algoritmo para el cálculo de las funciones $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$:

Sea $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, n puntos del plano Euclidiano. Usando la expresion (2.3) se define la matriz K dada por:

$$K_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & U(r_{12}) & \cdots & U(r_{1n}) \\ U(r_{21}) & 0 & \cdots & U(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U(r_{n1}) & U(r_{n2}) & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde r_{ij} es la distancia entre los puntos P_i y P_j . Ahora, definimos otra matriz P formada por los puntos P_i de la siguiente manera:

$$P_{n \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}$$

Después combinamos las dos matrices anteriores para definir la matrix L dada por:

$$L_{(n+3) \times (n+3)} = \left(\begin{array}{c|c} K & P \\ \hline P^T & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

donde P^T denota la transpuesta de la matriz P y $\mathbf{0}$ es la matriz nula de tamaño 3×3 .

Entonces las funciones que determina el algoritmo son de la forma:

$$f_x(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2 \log r_i^2 \quad (2.5)$$

$$f_y(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + \sum_{i=1}^n \mu_i r_i^2 \log r_i^2 \quad (2.6)$$

donde $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$.

Finalmente, los valores para los coeficientes se obtienen resolviendo las ecuaciones $LF = B$ y $LV = M$, donde $F = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, a_0, a_1, a_2)^T$, $B = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n, 0, 0, 0)^T$, $V = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, b_0, b_1, b_2)^T$ y $M = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n, 0, 0, 0)^T$. Luego, las dos funciones las podemos escribir como una vector de la forma $f(x, y) = [f_x(x, y), f_y(x, y)]$ que mapea cada punto (x_i, y_i) en su homólogo (x'_i, y'_i) .

Para ilustrar el algoritmo supongamos que se tienen cuatro puntos que forman una cuadrado, Bookstein (1989), sean $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-1, 0)$, $P_3 = (0, -1)$ y $P_4 = (1, 0)$. Ahora, se calculan las distancias entre los puntos y luego usamos la expresion (2.3) para formar la matriz K , por ejemplo,

$U(r_{12}) = U(\sqrt{2}) = 2 \log 2 = 1,3863$. De esta misma forma obtenemos las diferentes entradas de la matriz, resultando:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 \\ 1.3863 & 0 & 1.3863 & 5.5452 \\ 5.5452 & 1.3863 & 0 & 1.3863 \\ 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrix P formada por los P_i queda definida de la siguiente manera:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, combinando las dos matrices previas formamos la matriz L dada por:

$$L = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 & 1 & 0 & 1 \\ 1.3863 & 0 & 1.3863 & 5.5452 & 1 & -1 & 0 \\ 5.5452 & 1.3863 & 0 & 1.3863 & 1 & 0 & -1 \\ 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Usando los puntos de destino (x'_i, y'_i) [puntos homólogos a cada (x_i, y_i)], dados por: $(x'_1, y'_1) = (0, 0.75)$, $(x'_2, y'_2) = (-1, 0.25)$, $(x'_3, y'_3) = (0, -1.25)$ y $(x'_4, y'_4) = (1, 0.25)$. A continuación se forma y se da solución a las ecuaciones para construir las funciones $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

Sean

$$F = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, a_0, a_1, a_2)^T,$$

$$B = (0, -1, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

$$V = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, b_0, b_1, b_2)^T \text{ y}$$

$$M = (0.75, 0.25, -1.25, 0.25, 0, 0, 0)^T.$$

Ahora, resolviendo las ecuaciones $LF = B$ y $LV = M$ se tiene que:

$$F = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \text{ y } V = (-0.0902, 0.0902, -0.0902, 0.0902, 0, 0, 1)$$

Luego, las *thin-plate splines* de este ejemplo están dadas por:

$$f_x(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2 \log r_i^2 = x \quad (2.7)$$

y

$$f_y(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + \sum_{i=1}^n \mu_i r_i^2 \log r_i^2 = y + \sum_{i=1}^n \mu_i r_i^2 \log r_i^2 \quad (2.8)$$

La expresión (2.7) corresponde a la bien conocida función idéntica (ya que todos los coeficientes λ_i son cero), esto quiere decir que no hay cambios en la coordenada x entre las dos representaciones, ver figuras 2.1 y 2.2.

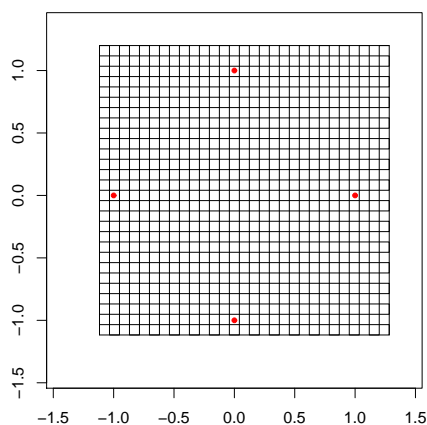


Figura 2.1: Puntos muestrales.

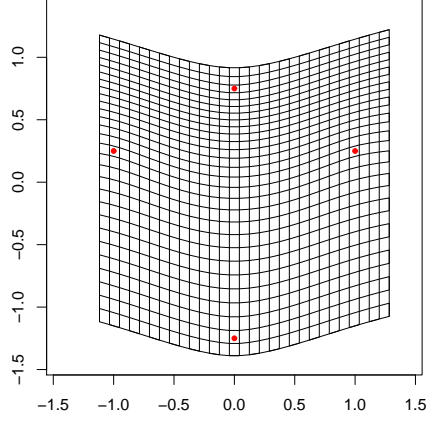


Figura 2.2: Puntos deformados.

A continuación se describe la aproximación para la estimación global y representación gráfica de la estructura de la covarianza espacial no estacionaria a partir de la deformación del espacio, el método es no paramétrico y no asume isotropía ni estacionariedad.

2.4. Descripción del Método

Supongamos que se tiene n datos muestrales en T puntos en el tiempo, escribimos $Z_{it} = Z(x_i, t)$ la observación tomada en el punto i en el tiempo t , donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $t = 1, 2, \dots, T$. Consideremos el modelo de la forma:

$$Z(x, t) = \mu(x) + E_\tau(x, t) + E_\epsilon(x, t),$$

donde $\mu(x)$ denota la media del campo, $E_\tau(x, t)$ es un proceso espaciotemporal con media cero y $E_\epsilon(x, t)$ denota el error de medición y de pequeña escala de variabilidad espacial. El proceso E_τ es asumido estaciona-

rio temporal con función de covarianza espacial que depende suavemente sobre las coordenadas geográficas. La distribución de los errores de medición son asumidos independientes de la ubicación y el tiempo.

Las observaciones muestrales se organizan en una matriz de datos X de tamaño $n \times T$, esto implica poder ver los n registros como puntos en \mathbb{R}^T . La covarianza muestral entre los valores en los puntos x_i y x_j está dada por:

$$s_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Z_{it} - \bar{Z}_i)(Z_{jt} - \bar{Z}_j).$$

Una métrica natural para la estructura de la covarianza espacial es proporcionada por las varianzas de las diferencias entre observaciones en las ubicaciones x_i y x_j , estimada sin asumir estacionariedad por:

$$d_{ij}^2 = \hat{v}\hat{a}r(Z_{it} - Z_{jt}) = s_{ii} + s_{jj} - 2s_{ij} \quad (2.9)$$

En muchas ocasiones a la expresión (2.9) hace referencia al variograma muestral, Matheron (1971), pero al referirnos al término variograma lo asociamos con el supuesto de estacionariedad de segundo orden, por tanto nos referimos a d_{ij}^2 como dispersiones espaciales.

Antes de explicar el método citamos dos conceptos para las representaciones en los sistemas de coordenadas:

2.4.1. G-Plano y D-Plano

Definición 2.4.1. *Al plano de coordenadas geográficas formado por los puntos muestrales se le denomina G-plano, este es expresado en términos de coordenadas rectangulares derivadas de la latitud y longitud. A la segunda representación determinada de las dispersiones espaciales tal que las distancias entre los puntos sea aproximada a las dispersiones espaciales d_{ij}^2 mediante una función monótona se le llama D-plano.*

Para la implementación de este método seguimos:

1. Se usa la técnica multivariante denominada Escalamiento Multidimensional no métrico (MDS):

El primer paso para la interpolación es la construcción del *D-plano*, es decir, determinar una configuración de puntos, y_i , y para ello se utiliza el escalamiento multidimensional no métrico, en particular el algoritmo de Shepard-Kruskal. Este algoritmo determina una función monótona g tal que $g(d_{ij}) = \delta_{ij} \approx |y_i - y_j|$. Además, como prueba de bondad se usa el *stress*.

2. Se calcula un mapeo suave, las *thin-plate splines*:

Una vez realizada la representación, *D-plano*, computamos una función suave $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que mapee (interpole) las coordenadas del *G-plano* en sus respectivas coordenadas de dispersión espacial del *D-plano*. Esta función f es calculada como dos *thin-plate splines*, una para el eje x y otra para el eje y . Todo el proceso es invariante bajo traslación y rotación.

A partir de las redes biortogonales introducidas por Bookstein en el campo de la morfometría, se proporciona una representación gráfica de la covarianza espacial del campo aleatorio, a partir de las *thin-plate splines* (para indicar las direcciones más fuertes y débiles).

Luego, el objetivo del proceso es estimar las funciones g derivada del MDS y f tal que usando los pasos previos nos proporciona un estimador no paramétrico de $Var[Z(x, t) - Z(y, t)]$ para cualesquiera dos puntos x y y , muestreados o no, dado por:

$$\hat{D}(x, y) = \hat{g}(|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)|). \quad (2.10)$$

Finalmente, para asegurarnos que el anterior modelo no paramétrico (2.10) corresponda a un modelo de covarianza definido no negativo, restringimos la función monótona g a una clase de funciones de variograma condicionalmente definidos no positivos: la técnica usa un resultado de Schoenberg (1938), que afirma que la clase de funciones de correlación continuas isotropicas validas en cualquier dimensión, es la clase de mezclas Gaussianas dada por:

$$r(|h|) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2 |h|^2) dF(t),$$

donde F es una función de distribución unidimensional arbitraria.

Capítulo 3

Aplicación

3.1. Simulación de un Campo no Estacionario

En este apartado utilizaremos el paquete estadístico de libre distribución **R**, usando la librería *RandomFields* para la simulación de un campo aleatorio estacionario. En particular se construye un campo aleatorio Gaussiano con modelo de variograma "*gauss*" y parámetros: media 1, varianza 1 y nugget igual a 0 (sin ruido), con el uso de la función *GaussRF*.

Las realizaciones del campo aleatorio han sido generadas a partir de las siguientes instrucciones en el **R**:

```
x = seq(0, 100, 0.5)
y = seq(0, 100, 0.5)
Red = expand.grid(x = x, y = y)
plot(Red)
Campo = GaussRF(x=x, y=y, model="gauss", grid=T, param = c(1, 1, 0, 2))
image = (x, y, Campo)
```

donde, *seq* es la función que genera una secuencia regular, *expand.grid* es

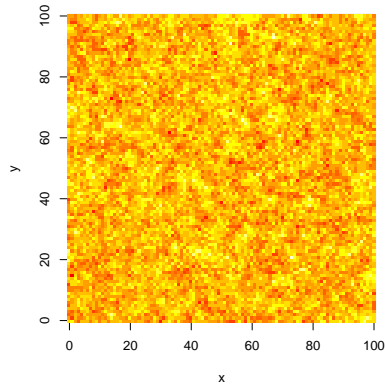


Figura 3.1: Simulación del campo aleatorio Gaussiano.

la función que forma una cuadrícula, *plot* es la función para la representación de la cuadrícula, *GaussRF* es la función para la construcción del campo Gaussiano e *image* es la función que crea una cuadrícula de rectángulos de color o escala de grises con los colores correspondientes a los valores del campo.

Después de compilar las anteriores instrucciones en **R** se obtiene la representación del campo aleatorio Gaussiano, figura 3.1.

| x | y | Registro1 | Registro2 | Registro3 |
|-----|-----|--------------|---------------|---------------|
| 0 | 0 | 1,933519364 | -1,0296597881 | 1,2440231143 |
| 0 | 1 | -2,750939790 | 0,3860140063 | 1,5523539112 |
| 0 | 3 | 2,350811530 | 2,1043077968 | 1,9877876280 |
| 1 | 0 | 1,186312162 | 0,9773412007 | 1,0066862403 |
| 0,5 | 2 | -0,828864122 | 0,2289118246 | -2,7728653131 |
| 1 | 2,5 | -3,616380028 | -0,3364077180 | 3,2281912757 |
| 3 | 3 | -0,451762437 | 2,6353493469 | -0,8502450727 |
| 2 | 1 | -0,710733401 | 2,2627502765 | 0,1987084567 |
| 2 | 1,5 | 4,119136701 | 1,9851727567 | 1,1769954159 |
| 3 | 2 | 0,187095045 | 0,8409381038 | 0,5685595713 |

Tabla 1. Muestra arbitraria del campo aleatorio.

De todos los registros del campo aleatorio se toma una muestra arbitraria de tamaño 10 y es presentada en la tabla 1. Dicha muestra se puede visualizar en la figura 3.2.

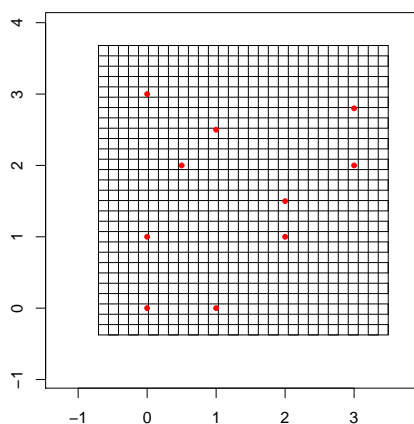


Figura 3.2: Representación gráfica de la muestra.

Ahora, consideramos las coordenadas de la muestra aleatoria como puntos de marca con sus correspondientes puntos transformados $P'_1 =$

$(0,0.2), P'_2 = (0.3, 1.1), P'_3 = (-0.05, 2.8), P'_4 = (1, 0.3), P'_5 = (1, 1.7), P'_6 = (1.2, 2), P'_7 = (3.2, 3), P'_8 = (2.5, 1.2), P'_9 = (1.8, 1.8), P'_{10} = (2.7, 1.8)$ y aplicamos la transformación thin-plate splines con el propósito de trabajar con el campo resultante que es no estacionario. Al emplear la anterior transformación en la figura 3.3 se puede visualizar la interpolación thin-plate splines sobre una cuadrícula.

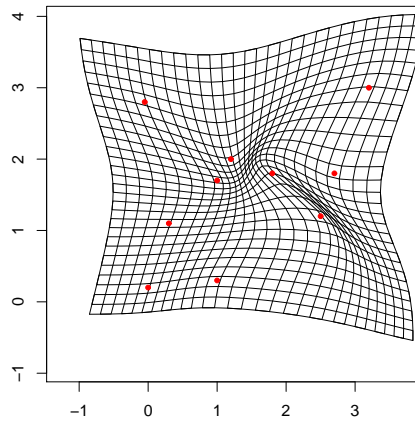


Figura 3.3: Representación de la deformación TPS.

A partir de los datos simulados y transformados con el proceso anterior, a continuación se ilustra la técnica de deformación del espacio propuesta por Sampson y Guttorp con el objeto de estimar la estructura de la covarianza espacial de un campo aleatorio no estacionario.

3.2. Presentación de los Datos y Deformación Espacial

En este apartado tiene como objeto ilustrar la estructura de la covarianza espacial a partir de las redes biortogonales, visualizando direcciones fuertes y débiles. Sea \mathbf{X} la matriz de datos de tamaño 10×3 , formada por los 10 puntos muestrales deformados x_i y sus registros (realizaciones independientes) en 3 instantes del tiempo que hacen parte del campo no estacionario.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1.933519364 & -1.0296597881 & 1.2440231143 \\ -2.750939790 & 0.3860140063 & 1.5523539112 \\ 2.350811530 & 2.1043077968 & 1.9877876280 \\ 1.186312162 & 0.9773412007 & 1.0066862403 \\ -0.828864122 & 0.2289118246 & -2.7728653131 \\ -3.616380028 & -0.3364077180 & 3.2281912757 \\ -0.451762437 & 2.6353493469 & -0.8502450727 \\ -0.710733401 & 2.2627502765 & 0.1987084567 \\ 4.119136701 & 1.9851727567 & 1.1769954159 \\ 0.187095045 & 0.8409381038 & 0.5685595713 \end{pmatrix}$$

A la representación formada por estos puntos se le llama *G-plano*, figura 3.2. A partir de la matriz de covarianza muestral entre los valores en los sitios x_i y x_j se determina la matriz de dispersiones espaciales d_{ij}^2 haciendo uso de la expresión 2.9.

$$d_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10.5609 & 2.1999 & 2.1471 & 7.5953 & 16.2342 & 11.6433 & 9.4360 & 2.5433 & 3.4520 \\ 10.5609 & 0 & 5.8113 & 5.4307 & 10.1208 & 2.0383 & 7.2916 & 3.6633 & 14.0296 & 3.9360 \\ 2.1999 & 5.8113 & 0 & 0.0093 & 2.0875 & 12.9893 & 3.7441 & 2.6300 & 1.7821 & 0.2315 \\ 2.1471 & 5.4307 & 0.0093 & 0 & 2.3175 & 12.3350 & 3.8778 & 2.6160 & 2.0064 & 0.1917 \\ 7.5953 & 10.1208 & 2.0875 & 2.3175 & 0 & 20.8824 & 1.1234 & 2.1152 & 2.6658 & 2.1700 \\ 16.2342 & 2.0383 & 12.9893 & 12.3350 & 20.8824 & 0 & 17.0340 & 11.1668 & 24.0352 & 10.5651 \\ 11.6433 & 7.2916 & 3.7441 & 3.8778 & 1.1234 & 17.0340 & 0 & 0.6240 & 6.8163 & 2.8089 \\ 9.4360 & 3.6633 & 2.6300 & 2.6160 & 2.1152 & 11.1668 & 0.6240 & 0 & 7.0829 & 1.4782 \\ 2.5433 & 14.0296 & 1.7821 & 2.0064 & 2.6658 & 24.0352 & 6.8163 & 7.0829 & 0 & 3.1842 \\ 3.4520 & 3.9360 & 0.2315 & 0.1917 & 2.1700 & 10.5651 & 2.8089 & 1.4782 & 3.1842 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación utilizamos el escalamiento multidimensional no métrico

(MDS) para determinar una configuración de puntos $\{y_i\}$, esta representación es el llamado *D-plano*, el MDS es aplicado a la matriz raíz cuadrada de dispersiones, d_{ij} .

En la tabla 2 se muestra los puntos $\{y_i\}$ y en la figura 3.4 se puede visualizar la distribución de los puntos de estudio sobre el *D-plano*, con un stress igual $8,111242e - 14$, que sería buen ajuste.

| x | y |
|------------|-------------|
| 0,6885196 | 1,82211828 |
| -1,8612006 | -0,19279530 |
| 0,4869581 | 0,35264639 |
| 0,3961046 | 0,38628943 |
| 1,2456966 | -0,87693885 |
| -3,1144526 | 0,49109524 |
| 0,4543075 | -1,58206537 |
| -0,1879011 | -1,12201452 |
| 1,7850660 | 0,66413749 |
| 0,1069019 | 0,05752722 |

Tabla 2. Coordenadas del D-plano.

Finalmente, realizado el *D-plano* se mapea (interpolan) las coordenadas del *G-plano* es sus respectivas coordenadas de dispersión espacial del *D-plano* para representar la red biortogonal, figura 3.5. En conclusión la figura 3.5 nos proporciona la representación gráfica de la estructura de la dispersión espacial del proceso, y esta indica que la covarianza espacial es más débil para el este y más fuerte en dirección oeste.

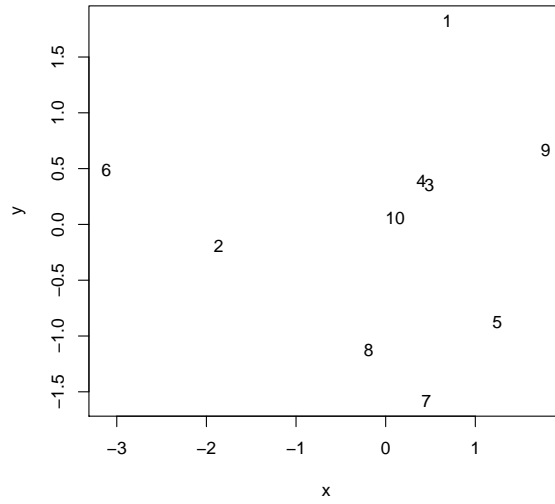


Figura 3.4: Representación D-plano.

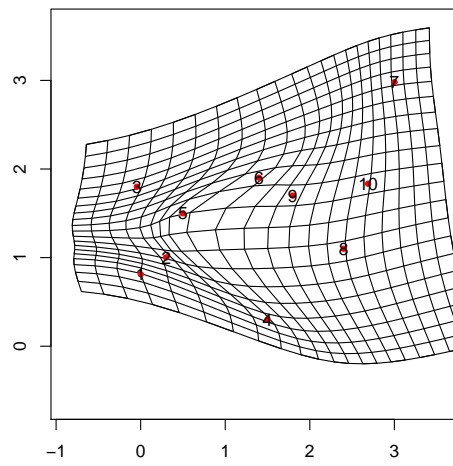


Figura 3.5: Red Biortogonal.

Capítulo 4

Trabajos Futuros

4.1. Trabajos Futuros

Este trabajo fue direccionado al manejo de la no estacionariedad en un campo aleatorio a partir de la deformación espacial, en particular la representación gráfica (red biortogonal). Para la continuación de este trabajo y el uso de total de la técnica, la tarea a desarrollar a continuación es ajustar un modelo de variograma g utilizando una mezcla de distribuciones Gaussianas.

Bibliografía

- [1] Anderes, E.B. and Stein, M.L. (2008). Estimating deformations of isotropic Gaussian random fields on the plane. *Annals of Statistics*, **36**, 719-741.
- [2] Arad, N., Dyn, N., Reisfeld, D. and Yeshurun, Y. (1994). Image warping by radial basis functions: applications to facial expressions. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, **56**, 161-172.
- [3] Bookstein, F.L. (1989). Principal Warps: thin plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **11**, 567-585.
- [4] Calder, C.A. (2007). Dynamic factor process convolution models for multivariate space-time data with application to air quality assessment. *Environmental and Ecological Statistics*, **14**, 229-247.
- [5] Calder, C.A. (2008). A dynamic process convolution approach to modeling and ambient particulate matter concentrations. *Environmetrics*, **19**, 39-48.
- [6] Calder, C.A. and Cressie, N. (2007). Some topics in convolution-based spatial modeling. In: *Proceedings of the 56th Session of the International*

Statistical Institute, Lisboa. International Statistical Institute. Voorburg, the Netherlands.

- [7] Clerc M, Mallat S. 2003. Estimating deformations of stationary processes. *Annals of Statistics*, **31**, 1772-1821.
- [8] Cressie Noel, A.C. (1991). *Statistics for spatial data*. John Wiley y Sons, Inc.
- [9] Creutin, J.D. and Obled, C. (1982). Objective analyses and mapping techniques for rainfall fields: An objective comparison. *Water Resources Research*, **18**, 413-431.
- [10] Damian, D., Sampson, P.D., and Guttorp, P. (2001). Bayesian estimation of semi-parametric nonstationary spatial covariance structures. *Environmetrics*, **12**, 161-178.
- [11] Damian, D., Sampson, P.S., and Guttorp, P. (2003). Variance modeling for nonstationary spatial processes with temporal replicates. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, **108**, D24, 8778.
- [12] DHondt, O., Lopez-Martinez, C., Ferro-Famil, L., and Pottier, E. (2007). Spatially nonstationary anisotropic texture analysis in SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **45**, 3905-3918.
- [13] Fuentes, M. (2001). A new high frequency kriging approach for nonstationary environmental processes. *Environmetrics*, **12**, 469-483.
- [14] Fuentes, M. (2001). A new high frequency kriging approach for nonstationary environmental processes. *Environmetrics*, **12**, 469-483.
- [15] Fuentes, M. (2002a). Spectral methods for nonstationary spatial processes. *Biometrika*, **89**, 197-210.

- [16] Fuentes, M. (2002b). Interpolation of nonstationary air pollution processes: A spatial spectral approach. *Statistical Modelling*, **2**, 281-298.
- [17] Fuentes, M. and Smith, R.L. (2001). A new class of nonstationary spatial models. Tech report, North Carolina State Univ. Institute of Statistics Mimeo Series No. 2534, Raleigh.
- [18] Glasbey CA, Mardia KV. 1998. A review of image warping methods. *Journal of Applied Statistics*, **25**, 155-171.
- [19] Guillot, G., Senoussi, R., and Monestiez, P. (2001). A positive definite estimator of the non stationary covariance of random fields. In: *Geo-ENV 2000: Third European Conference on Geostatistics for Environmental Applications*, P. Monestiez, D. Allard, and R. Froidevaux, Eds., Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, 333-344.
- [20] Guttorp, P., and Sampson, P.D. (1994). Methods for estimating heterogeneous spatial covariance functions with environmental applications. In: *Handbook of Statistics*, vol. **12**, G.P. Patil and C.R. Rao, Eds., Elsevier Science, New York, pp. 661-689.
- [21] Haas, T.C. (1990a). Kriging and automated variogram modeling within a moving window. *Atmospheric Environment*, **24A**, 1759-1769.
- [22] Haas, T.C. (1990b). Lognormal and moving window methods of estimating acid deposition. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 950-963.
- [23] Higdon, D. (1998). A process-convolution approach to modeling temperatures in the North Atlantic Ocean, *Journal of Environmental and Ecological Statistics*, **5**, 173-190.

- [24] Higdon, D.M., Swall, J., and Kern, J. (1999). Non-stationary spatial modeling. In *Bayesian Statistics 6*, v.J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. David, and A.F.M. Smith, Eds., Oxford University Press, Oxford, U.K., pp. 761-768.
- [25] Holland, D., Saltzman, N., Cox, L., and Nychka, D. (1998). Spatial prediction of sulfur dioxide in the eastern United States. In: *GeoENV II: Geostatistics for Environmental Applications*. J. Gomez-Hernandez, A. Soares, and R. Froidevaux, Eds. Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, pp. 65-76.
- [26] Mardia, KV, Angulo, JM, Goitia A. (2006). Synthesis of image deformation strategies. *Image and Vision Computing*, **24**, 1-12.
- [27] Matern, B. (1986). *Spatial Variation* (2nd ed; Lecture Notes in Statistics Vol. **36**), New York: Springer-Verlag.
- [28] Matheron, G. (1971). The Theory of Regionalized Variables and its Applications. Fascicule **5**, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique de Fontainebleau.
- [29] Nott, D.J. and Dunsmuir, W.T.M. (2002). Estimation of nonstationary spatial covariance structure. *Biometrika*, **89**, 819-829.
- [30] Nychka, D. and Saltzman, N. (1998). Design of air quality networks. In: *Case Studies in Environmental Statistics*. D. Nychka, W. Piegorsch, and L. Cox, eds. Springer-Verlag, New York, pp. 51-76.
- [31] Nychka, D., Wikle, C., and Royle, J.A. (2002). Multiresolution models for nonstationary spatial covariance functions. *Statistical Modelling*, **2**, 315-331.

- [32] Obled, Ch. and Creutin, J.D. (1986). Some developments in the use of empirical orthogonal functions for mapping meteorological fields. *Journal of Applied Meteorology*, **25**, 1189-1204.
- [33] Oehlert, G.W. (1993). Regional trends in sulfate wet deposition. *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 390-399.
- [34] Paciorek, C.J. and Schervish, M.J. (2006). Spatial modelling using a new class of nonstationary covariance functions. *Environmetrics*, **17**, 483-506.
- [35] Perrin, O. and Meiring, W. (1999). Identifiability for non-stationary spatial structure. *Journal of Applied Probability*, **36**, 1244-1250.
- [36] Perrin, O. and Senoussi, R. (2000). Reducing non-stationary random fields to stationarity and isotropy using a space deformation. *Statistics and Probability Letters*, **48**, 23-32.
- [37] Sampson, P.D., and Guttorp, P. (1992). Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 108-119.
- [38] Schoenberg, I. J. (1938). Metric Spaces and Completely Monotone Functions. *The Annals of Mathematics*, **79**, 811-841.
- [39] Stein, M. L. (1999). Interpolation of spatial data: Some theory for Kriging. *Springer Verlag*.