Guía docente de la asignatura

Problemas Variacionales Geométricos (M53/56/2/18)

Fecha de aprobación por la Comisión Académica: 02/07/2025

Máster	Máster Universitario en Física y Matemáticas - Fisymat
MÓDULO	Módulo III: Métodos y Modelos Matemáticos en Ciencias e Ingeniería
RAMA	Ciencias
CENTRO RESPONSABLE DEL TÍTULO	Escuela Internacional de Posgrado

Semestre	Segundo	**Créditos**	6	**Tipo**	Optativa	**Tipo de enseñanza**	Presencial

PRERREQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES

Para cursar con provecho esta asignatura es imprescindible haber seguido

- un curso de derivación e integración en varias variables,
- un curso de variedades diferenciables y geometría riemanniana. Se recomienda haber cursado la asignatura "Principios de geometría y aplicaciones en física" del máster Física y Matemáticas.

En el caso de utilizar herramientas de IA para el desarrollo de la asignatura, el estudiante debe adoptar un uso ético y responsable de las mismas. Se deben seguir las recomendaciones contenidas en el documento de "Recomendaciones para el uso de la inteligencia artificial en la UGR" publicado en esta ubicación: https://ceprud.ugr.es/formacion-tic/inteligencia-artificial/recomendaciones-ia#contenidoo

BREVE DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS (Según memoria de verificación del Máster)

- Subvariedades riemannianas.
- Volumen riemanniano. Fórmulas de variación del volumen. Superficies estables. Problema de Bernstein. Superficies minimales y con curvatura media constante.
- Ecuaciones elípticas de segundo orden en variedades riemannianas. Principio de

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/
Código seguro de verificación (CSV): EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6
06/05/2026 - 10:42
Pág. 1 de 7

reflexión de Alexandrov.
- Valores propios del Laplaciano en variedades riemannianas.
- Operador de Dirac.

COMPETENCIAS

COMPETENCIAS BÁSICAS

- CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.
- CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.
- CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.
- CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
- CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

COMPETENCIAS GENERALES

- CG02 - Capacidad de generar y desarrollar de forma independiente propuestas innovadoras y competitivas en la investigación y en la actividad profesional en el ámbito científico de la Física y Matemáticas
- CG04 - Saber comunicarse con la comunidad académica y científica en su conjunto, con la empresa y con la sociedad en general acerca de la Física y/o Matemáticas y sus implicaciones académicas, productivas o sociales
- CG05 - Adquirir la capacidad de desarrollar un trabajo de investigación científica de forma independiente y en toda su extensión. Ser capaz de buscar y asimilar bibliografía científica, formular las hipótesis, plantear y desarrollar problemas y elaborar de conclusiones de los resultados obtenidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

- CE01 - Resolver problemas físicos y matemáticos, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos
- CE02 - Desarrollar la capacidad de decidir las técnicas adecuadas para resolver un problema concreto con especial énfasis en aquellos problemas asociados a la Modelización en Ciencias e Ingeniería, Astrofísica, Física, y Matemáticas
- CE03 - Tener capacidad para elaborar y desarrollar razonamientos matemáticos avanzados, y profundizar en los distintos campos de las matemáticas

COMPETENCIAS TRANSVERSALES

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/ 06/05/2026 - 10:42
Código seguro de verificación (CSV): EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6 Pág. 2 de 7

- CT01 - Fomentar el espíritu innovador, creativo y emprendedor
- CT05 - Capacidad de aprendizaje autónomo y responsabilidad (análisis, síntesis, iniciativa y trabajo en equipo

COMPETENCIAS

COMPETENCIAS BÁSICAS

- CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.
- CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.
- CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.
- CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
- CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

COMPETENCIAS GENERALES

- CG02 - Capacidad de generar y desarrollar de forma independiente propuestas innovadoras y competitivas en la investigación y en la actividad profesional en el ámbito científico de la Física y Matemáticas
- CG04 - Saber comunicarse con la comunidad académica y científica en su conjunto, con la empresa y con la sociedad en general acerca de la Física y/o Matemáticas y sus implicaciones académicas, productivas o sociales
- CG05 - Adquirir la capacidad de desarrollar un trabajo de investigación científica de forma independiente y en toda su extensión. Ser capaz de buscar y asimilar bibliografía científica, formular las hipótesis, plantear y desarrollar problemas y elaborar de conclusiones de los resultados obtenidos

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

- CE01 - Resolver problemas físicos y matemáticos, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos
- CE02 - Desarrollar la capacidad de decidir las técnicas adecuadas para resolver un problema concreto con especial énfasis en aquellos problemas asociados a la Modelización en Ciencias e Ingeniería, Astrofísica, Física, y Matemáticas
- CE03 - Tener capacidad para elaborar y desarrollar razonamientos matemáticos avanzados, y profundizar en los distintos campos de las matemáticas

COMPETENCIAS TRANSVERSALES

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/
Código seguro de verificación (CSV): EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6
06/05/2026 - 10:42
Pág. 3 de 7

- CT01 - Fomentar el espíritu innovador, creativo y emprendedor
- CT05 - Capacidad de aprendizaje autónomo y responsabilidad (análisis, síntesis, iniciativa y trabajo en equipo

RESULTADOS DE APRENDIZAJE (Objetivos)

Se pretende dotar al alumnado de los conocimientos y técnicas básicas para desarrollar un trabajo eficaz de investigación en cuestiones relacionadas con problemas variacionales con un fuerte componente geométrico: minimización de funcionales en variedades riemannianas y sub-riemannianas, mecánica de fluidos, y funcionales en física teórica, entre otros. Dichas técnicas comprenden el estudio de subvariedades riemannianas, incluyendo subvariedades espaciales de variedades de Lorentz; cálculo geométrico de fórmulas de variación, con especial énfasis en el funcional volumen riemanniano; estudio de subvariedades minimales y con curvatura media constante; ecuaciones elípticas de segundo orden en variedades riemannianas.

PROGRAMA DE CONTENIDOS TEÓRICOS Y PRÁCTICOS

TEÓRICO

Tema 0. Preliminares: subvariedades riemannianas, campos, grupos 1-paramétricos y flujos, integración en variedades y medida riemanniana, fórmula del cambio de variable, teorema de la divergencia.

Tema 1. Fórmulas de variación para la medida riemanniana sobre una subvariedad.

Tema 2. El problema de Plateau. Subvariedades minimales. La condición de estabilidad y sus aplicaciones. Teorema de Bonnet-Myers. Teorema de Bernstein.

Tema 3. El problema isoperimétrico. Caracterización de puntos críticos y mínimos de segundo orden. Propiedades topológicas y caracterización de hipersuperficies compactas estables.

Tema 4. Superficies de curvatura media constante. Principio del máximo. Teorema de Alexandrov.

Tema 5. La desigualdad isoperimétrica clásica. Consecuencias: desigualdades de Poincaré-Wirtinger y de Sobolev. Estimaciones del primer valor propio del Laplaciano.

PRÁCTICO

No aplicable

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA FUNDAMENTAL

1. I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1984.

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/
Código seguro de verificación (CSV): EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6
06/05/2026 - 10:42
Pág. 4 de 7

2. I. Chavel, Isoperimetric inequalities. Cambridge Tracts in Mathematics, 145. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
3. I. Chavel, Riemannian Geometry. A modern introduction (second edition). Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 98. Cambridge University Press, 2006.
4. M. P. do Carmo, Riemannian geometry. Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser Boston Inc.,Boston, 1992.
5. D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
6. E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Monographs in Mathematics, Volume 80, Birkhäuser, Boston, 1984.
7. S. Montiel and A. Ros, Curves and surfaces. Graduate Studies in Mathematics, Volume 69, American Mathematical Society, 2009.
8. L. Simon, Lectures on geometric measure theory, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 3. Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.
9. M. Spivak, A comprehensive introduction to Differential Geometry, vol. IV, V. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

1. M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne. (French) Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194 Springer-Verlag, Berlin-New York 1971.
2. U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, Minimal surfaces. I. Boundary value problems. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 295. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
3. U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, Minimal surfaces. II. Boundary regularity. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 296. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
4. M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of variations. I. The Lagrangian formalism. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 310. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
5. M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of variations. II. The Hamiltonian formalism. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 311. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
6. F. Maggi, Sets of finite perimeter and geometric variational problems. An introduction to geometric measure theory, Cambridge University Press, 2012.

ENLACES RECOMENDADOS

Página web del máster en Física y Matemáticas de la Universidad de Granada

METODOLOGÍA DOCENTE

- MD01 Lección magistral
- MD04 Seminarios
- MD05 Tutorías académicas

EVALUACIÓN (instrumentos de evaluación, criterios de evaluación y porcentaje sobre la calificación final)

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/ 06/05/2026 - 10:42
Código seguro de verificación (CSV): EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6 Pág. 5 de 7

EVALUACIÓN ORDINARIA

El artículo 17 de la Normativa de Evaluación y Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada establece que la convocatoria ordinaria estará basada preferentemente en la evaluación continua del estudiante, excepto para quienes se les haya reconocido el derecho a la evaluación única final.

El procedimiento de evaluación estará basado en estos apartados:

1.1. Valoración de las pruebas, exámenes, ejercicios, prácticas o problemas realizados individualmente o en grupo a lo largo del curso (70%). El procedimiento habitual consistirá en la entrega y/o exposición de varios ejercicios y/o trabajos que el estudiante tendrá que resolver usando lo aprendido en el curso. De forma alternativa, cualquier estudiante podrá solicitar durante las 5 primeras sesiones del curso que su evaluación en este apartado se lleve a cabo mediante la realización de una prueba escrita u oral que contendrá cuestiones teóricas y prácticas relacionadas con los contenidos del curso. La realización de esta prueba será obligatoria para aquellos alumnos que hayan faltado presencialmente al menos a 5 sesiones del curso. En cualquier caso, para superar la asignatura será necesario obtener al menos una puntuación de 5 puntos sobre 10 en este apartado.

1.2. Valoración de la asistencia y participación del alumno en clase y en los seminarios, y sus aportaciones en las actividades desarrolladas (30%).

EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

El artículo 19 de la Normativa de Evaluación y Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada establece que los estudiantes que no hayan superado la asignatura en la convocatoria ordinaria dispondrá de una convocatoria extraordinaria. A ella podrán concurrir todos los estudiantes, con independencia de haber seguido o no un proceso de evaluación continua. De esta forma, el estudiante que no haya realizado la evaluación continua tendrá la posibilidad de obtener el 100% de la calificación mediante la realización de una prueba oral y/o escrita que contendrá cuestiones teóricas y prácticas relacionadas con los contenidos del curso (100%).

EVALUACIÓN ÚNICA FINAL

El artículo 8 de la Normativa de Evaluación y Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada establece que podrán acogerse a la evaluación única final, el estudiante que no pueda cumplir con el método de evaluación continua por causas justificadas. Para acogerse a la evaluación única final, el estudiante, en las dos primeras semanas de impartición de la asignatura o en las dos semanas siguientes a su matriculación si ésta se ha producido con posterioridad al inicio de las clases o por causa sobrevenidas. Lo solicitará, a través del procedimiento electrónico, a la Coordinación del Máster, quien dará traslado al profesorado correspondiente, alegando y acreditando las razones que le asisten para no poder seguir el sistema de evaluación continua.

La evaluación en este caso consistirá en la realización de una única prueba oral y/o escrita que contendrá cuestiones teóricas y prácticas relacionadas con los contenidos del curso (100%).

INFORMACIÓN ADICIONAL

Información de interés para estudiantado con discapacidad y/o Necesidades Específicas de Apoyo

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/ 06/05/2026 - 10:42
Código seguro de verificación (CSV): EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6 Pág. 6 de 7

Educativo (NEAE): Gestión de servicios y apoyos (https://ve.ugr.es/servicios/atencion-social/estudiantes-con-discapacidad).

Firma (1): Universidad de Granada
CIF: Q1818002F

Firmado electrónicamente según arts. 15, 17 y 41.1 del Reglamento de Adm. Electrónica de la Universidad de Granada (BOJA nº 85 de 6 de mayo de 2021)
Este documento firmado digitalmente puede verificarse en https://sede.ugr.es/verifirma/
Código seguro de verificación (CSV): **EB931789A7919B0ED354230A352AE5F6**
06/05/2026 - 10:42
Pág. 7 de 7