

Guía docente de la asignatura

## Didáctica del Análisis (M05/56/1/30)

Fecha de aprobación por la Comisión Académica: 21/06/2022

**Máster**

Máster Universitario en Didáctica de la Matemática

**MÓDULO**

Cursos Especializados

**RAMA**

Ciencias Sociales y Jurídicas

**CENTRO RESPONSABLE DEL TÍTULO**

Escuela Internacional de Posgrado

**Semestre**

Segundo

**Créditos**

4

**Tipo**

Optativa

**Tipo de enseñanza**

Presencial

### PRERREQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES

Tener cursado un curso de Cálculo Infinitesimal o Análisis Matemático.

### BREVE DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS (Según memoria de verificación del Máster)

#### Tema 1. La investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

- Funciones de variable real y análisis matemático en el currículo de los bachilleratos y en los planes de estudios de grado. La organización de los programas: estructura y secuenciación. Materiales y recursos para la enseñanza del cálculo y la iniciación al análisis: calculadoras gráficas y software de cálculo numérico, simbólico y de representación.
- Evolución histórica del análisis matemático. Orientaciones de la investigación didáctica sobre análisis matemático: fundamentos epistemológicos de las nociones centrales del análisis; diseño, desarrollo y evaluación de programas; la formación del profesorado de matemáticas en análisis matemático.

#### Tema 2.

- Sistemas numéricos. Construcción de los conjuntos numéricos. Propiedades algebraicas y propiedades analíticas de las estructuras numéricas. Evolución histórica de los conjuntos numéricos; construcciones formales e informales; sistemas de representación.
- Procesos infinitos. Infinito potencial e infinito actual. Densidad y completitud. Conjuntos



numerables y no numerables, recta real y axioma del continuo. Introducción a los números irracionales en bachillerato. Significados de los números irracionales. Conflictos epistemológicos en la historia de los sistemas numéricos.

### Tema 3. Problemas, conceptos y métodos en Didáctica del Análisis.

- Sucesión numérica, límite de una sucesión, series. Convergencia de una sucesión: criterios y problemas. Fenómenos que organizan el límite finito de una sucesión y el límite infinito de una sucesión.
- Función real de una variable real. Funciones y relaciones funcionales: modelos de relaciones entre magnitudes variables para un mismo fenómeno. Evolución histórica del concepto de función.
- Límite y continuidad de una función en un punto; fenómenos que subyacen en las nociones de límite y continuidad. Fenómenos que organizan el límite finito de una función en un punto y el límite infinito de una función en un punto y en el infinito.
- Continuidad en un intervalo, propiedades de las funciones continuas en un intervalo.
- Aprendizaje de las nociones de límite y continuidad de una función real de variable real. Obstáculos. Marcos teóricos (Pensamiento Matemático Avanzado y Fenomenología)

### Tema 4. Investigación en Derivación de funciones

- Gradiente de una función. Variación media e instantánea, pendiente de la recta tangente a una curva en un punto; familias de fenómenos de los que surge la noción de derivada. Derivada de una función en un punto. Derivadas laterales. Derivación y continuidad. Métodos y demostraciones en el cálculo con derivadas.
- Función derivada. Algebra de derivadas. Propiedades locales y globales de las funciones derivables. Representación de funciones derivables en un intervalo. Crecimiento y decrecimiento. Extremos de una función derivable. Teorema del valor medio y aplicaciones. Interpretación geométrica de propiedades analíticas de las funciones derivables. Dificultades y errores en el cálculo de derivadas.
- Aproximación lineal de una función en el entorno de un punto en el cual es derivable. Splines lineales, cuadráticos y cúbicos. Trazado de curvas. Conversión de una función en un polinomio: teorema de Taylor. Técnicas de ajuste y de aproximación con funciones derivables.

### Tema 5. Investigación en Integración de funciones

- Medida del área bajo una curva. El problema de la cuadratura. Técnicas para medir el área; comparación y acotación; funciones escalonadas. Integral de una función continua en un intervalo; propiedades. Integral de Riemann. Funciones integrables; propiedades. Integral de Lebesgue; funciones medibles. Primitiva de una función; técnicas de cálculo de primitivas. Teorema fundamental del cálculo. Aplicaciones

## COMPETENCIAS

### COMPETENCIAS BÁSICAS

- CB6 - Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.



- CB7 - Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.
- CB8 - Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.
- CB9 - Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones y los conocimientos y razones últimas que las sustentan a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
- CB10 - Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

### COMPETENCIAS GENERALES

- CG01 - Aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con el área de estudio
- CG02 - Integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios
- CG03 - Comunicar sus conclusiones (y los conocimientos y razones últimas que las sustentan) a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades
- CG04 - Aprender de manera autodirigida y autónoma a lo largo de la vida profesional

### COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

- CE01 - Plantear y evaluar problemas de investigación en Didáctica de la Matemática
- CE02 - Analizar críticamente la literatura científica en Didáctica de la Matemática
- CE03 - Buscar fuentes bibliográficas, así como analizar y organizar la literatura existente sobre temas específicos relacionados con la Didáctica de la Matemática
- CE04 - Caracterizar y definir un problema de investigación en Didáctica de la Matemática
- CE05 - Delimitar el marco metodológico, diseño y componentes de una investigación en Didáctica de la Matemática
- CE06 - Establecer los descriptores generales que caracterizan una investigación en Didáctica de la Matemática
- CE07 - Seleccionar la muestra, las variables, los instrumentos de recogida de información, las tareas y el marco temporal para la realización de una investigación en Didáctica de la Matemática
- CE08 - Señalar criterios de calidad y control para el diseño de una investigación en Didáctica de la Matemática
- CE10 - Seleccionar, elaborar, analizar e interpretar los datos en una investigación en educación matemática; Interpretar y presentar los resultados de una investigación
- CE11 - Aplicar los conocimientos adquiridos a la práctica en: a) la investigación propia de la Didáctica de las Matemáticas; b) el ámbito de la enseñanza de las matemáticas
- CE12 - Adquirir o mejorar las habilidades de exposición oral y escrita de trabajos teóricos y de investigación
- CE13 - Fomentar el espíritu crítico, reflexivo e innovador para mejorar la educación matemática a partir de la investigación



## COMPETENCIAS TRANSVERSALES

- CT01 - Mostrar interés por la calidad y la excelencia en la realización de diferentes tareas.
- CT03 - Tener un compromiso ético y social en la aplicación de los conocimientos adquiridos.

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE (Objetivos)

El alumno sabrá/comprenderá:

- Los fundamentos del pensamiento matemático avanzado
- Los marcos teóricos más usuales en la investigación en didáctica del análisis
- Las investigaciones más destacadas en didáctica del análisis
- Los temas de investigación actuales en didáctica del análisis

El alumno será capaz de:

- Diferenciar investigaciones fundamentadas en el pensamiento matemático avanzado
- Sintetizar y señalar los elementos básicos de una investigación en didáctica del análisis
- Diseñar un esbozo de investigación en didáctica del análisis

## PROGRAMA DE CONTENIDOS TEÓRICOS Y PRÁCTICOS

### TEÓRICO

1. Pensamiento Matemático Avanzado. Marcos teóricos de referencia
2. Investigación en didáctica del análisis.
  1. Sobre Límites y continuidad de funciones
  2. Sobre la derivada
  3. Sobre la integral

### PRÁCTICO

## BIBLIOGRAFÍA

### BIBLIOGRAFÍA FUNDAMENTAL

- Azcárate, C., Camacho, M., González, T. y Moreno, M. (Coords) (2015). Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM. Universidad de la Laguna.
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Mariñ ez-Luaces, V., y Törner, G. (2016). Teaching and learning of calculus. Springer.
- Harel, G., Selden, A., y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics



- education: Past, present and future (pp. 147-172). Sense Publishers.
- Tall, D. (1991) (Ed.), Advanced mathematical thinking. Kluwer Academic Publishers.

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1(1), 40-55.
- Azcárate, C., Camacho, M., y Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas. investigación en didáctica del análisis. En T. Ortega (Ed.), Actas del iii seiem (pp. 283- 293). SEIEM.
- Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2), 135-149.
- Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos  $f'(a)$  y  $f'(x)$  en profesores de matemática. Enseñanza de las Ciencias, 29(2), 191-206.
- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. Relime, 9(2), 189-209.
- Camacho, M. y Depool, R. (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) DERIVE. Educación Matemática, 15(3), 119- 140.
- Claros, F. J. (2010). Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada.
- Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. PNA, 1(3), 125-137.
- Claros, F. J., Sánchez, M.T. y Coriat, M. (2009). Límite de una sucesión: Respuestas de los alumnos de 10 y 20 de Bachillerato. Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII, 35-54.
- Coriat M. y Scaglia S. (2000). Representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las Ciencias, 18(1), 25-34.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. Journal of Mathematical Behavior, 15, 167-192.
- D'Amore, B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. La Matematica e la sua Didattica, 3, 322-335.
- Dreyfus, T.(1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition. Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.
- Dreyfus, T. (2014, September). Solid findings: Concept images in students' mathematical reasoning. EMS Newsletter, 50-52.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1996). Quel conitif retenir en didactique des mathématiques? Reserches en Didactique des Mathématiques, 6(3), 349-382.
- Duval, R. (1999). Representation, visio and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st pme-na international conference (Vol. 1, p. 3-26).
- Edwards, B., Dubinsky, E., y McDonald, M. (2005). Advanced mathematical thinking. Mathematical Thinking and Learning, 7 (1), 15-25.
- Espinoza, I. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. Enseñanza de



- las Ciencias, 18(3), 355-368.
- Fernández-Plaza, J. (2011). Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. un estudio exploratorio. Trabajo fin de Master no publicado, Universidad de Granada.
  - Fernández-Plaza, J. A. (2015). Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
  - Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. PNA, 7 (3), 117-131.
  - Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Pub. Comp.
  - Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, 53-67.
  - Gardiner, A. (1982). *Infinite Processes. Background to Analysis*. New York: Springer-Verlag.
  - González Astudillo, M.T. (2011). Historia de la enseñanza del Cálculo a través de los libros. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 415-437.
  - Gray, E., y Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th pme international conference* (Vol. 2, pp. 72-79).
  - Guzmán, M. y Rubio, B. (1992). Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático. *Estrategias del pensamiento matemático*. Madrid: Pirámide.
  - Hairer, E. y Wanner, G. (1995). *Analysis by its History*. New Ork: Springer.
  - Harel, G. and Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical Thinking at any ages: its nature and its developments. *Mathematical Thinking and Learning*, 7:1, 27-50.
  - Hauchart, C, Rouche, N (1987). *Apprivoiser l'infini*. Louvain-la-Neuve, BEL: Ciaco.
  - Kaput, J. and Dubinsky, E. (1994) *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*. Washington DC: The Mathematical Association of America.
  - Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.
  - Monaghan, M. (1982). Problems with the language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
  - Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
  - Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 71-93.
  - Robert, A., y Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127-139). Kluwer Academic Publishers.
  - Romero, I. y Rico, L (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Ema*, 4( 2), 117-151
  - Salanskis, J.M. y Sinaceur, H. (1992). *Le Labyrinthe du Continu*. París: Springer- Verlag
  - Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema*, 27(45), 281-302.
  - Schwarzenberger, R. y Tall, D. (1978) *Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits*. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49
  - Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
  - Sierpiska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math.* vol 18, 371-397.
  - Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.
  - Sierra, M., González, MT. y López, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en



los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria: 1940-1995. Enseñanza de las Ciencias, 17(3), 463-476

- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), Proceedings of the 19th pme international conference (Vol. 1, p. 61-75).
- Tall, D. y Tirosh, D. (2001). Infinity – The never-ending struggle. Educational Studies in Mathematics, 2-3(48), 129-136.
- Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with a particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
- Truss, J. K. (1997). Foundations of Mathematical Analysis. Oxford: Clarendon Press.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Enseñanza de las Ciencias, 16 (2), 233-249.
- Vargas, M. F. (2020). La derivada de una función desde la perspectiva de los profesores de matemática de 1º de bachillerato. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305.
- Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1980). Concepts images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), Proceedings of the 4th pme international conference (pp. 177-184).
- Williams, S. (1991). Models of Limit held by college calculus students. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), 219-236.

## ENLACES RECOMENDADOS

- Grupo de investigación “FQM193 - Didáctica de la matemática. Pensamiento numérico”: <http://fqm193.ugr.es>
- Página web del grupo de Didáctica del Análisis de la SEIEM (GIDAM) <http://www.seiem.es/grp/gidam.shtml>

## METODOLOGÍA DOCENTE

- MD01 Lección magistral/expositiva
- MD02 Sesiones de discusión y debate.
- MD05 Preparación y presentación de los trabajos
- MD06 Análisis de fuentes y documentos

## EVALUACIÓN (instrumentos de evaluación, criterios de evaluación y porcentaje sobre la calificación final)

### EVALUACIÓN ORDINARIA

El artículo 18 de la Normativa de Evaluación y Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada establece que la convocatoria ordinaria estará basada preferentemente en la evaluación continua del estudiante, excepto para quienes se les haya reconocido el derecho a la evaluación única final.

1. Trabajos escritos (70%). A través de Prado. La competencia escrita se valorará atendiendo a dos elementos:



1. Los cuestionarios de la plataforma
  2. La calidad de los trabajos de análisis de documentos
  3. Trabajo final
2. Competencia oral (20%). En vivo para los estudiantes presenciales. A través de Google Meet para los virtuales.
1. Defensa oral del trabajo final y defensa del análisis de los documentos
3. Observación (10%). En vivo para los presenciales y a través de los Foros de Prado para los virtuales
1. Se valorarán diferentes aspectos como el aprovechamiento de las clases, el grado de implicación y participación en consultas, exposiciones, debates, elaboración de trabajos y puestas en común, o la colaboración y realización de otras actividades que se puedan proponer a lo largo del curso.

### Criterios de evaluación

- Conocer los fundamentos del pensamiento matemático avanzado.
- Conocer y diferenciar los marcos teóricos más usuales en la investigación en didáctica del análisis.
- Diferenciar investigaciones fundamentadas en el pensamiento matemático avanzado.
- Sintetizar y señalar los elementos básicos de una investigación en didáctica del análisis.
- Diseñar un esbozo de investigación en didáctica del análisis.

### EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

El artículo 19 de la Normativa de Evaluación y Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada establece que los estudiantes que no hayan superado la asignatura en la convocatoria ordinaria dispondrán de una convocatoria extraordinaria. A ella podrán concurrir todos los estudiantes, con independencia de haber seguido o no un proceso de evaluación continua. De esta forma, el estudiante que no haya realizado la evaluación continua tendrá la posibilidad de obtener el 100% de la calificación en esta convocatoria. En esta ocasión, para la convocatoria extraordinaria se valorarán:

1. Trabajos escritos (70%). A través de Prado. La competencia escrita se valorará atendiendo a dos elementos:
  1. Los cuestionarios de la plataforma
  2. la calidad de los trabajos de análisis de documentos
  3. Trabajo final
2. Competencia oral (30%). En vivo para los estudiantes presenciales. A través de Google Meet para los virtuales.

### Criterios de evaluación

- Conocer los fundamentos del pensamiento matemático avanzado.
- Conocer y diferenciar los marcos teóricos más usuales en la investigación en didáctica del análisis.
- Diferenciar investigaciones fundamentadas en el pensamiento matemático avanzado.
- Sintetizar y señalar los elementos básicos de una investigación en didáctica del análisis.
- Diseñar un esbozo de investigación en didáctica del análisis.

### EVALUACIÓN ÚNICA FINAL

El artículo 8 de la Normativa de Evaluación y Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada establece que podrán acogerse a la evaluación única final, el estudiante que no pueda





cumplir con el método de evaluación continua por causas justificadas. Para acogerse a la evaluación única final, el estudiante, en las dos primeras semanas de impartición de la asignatura o en las dos semanas siguientes a su matriculación si ésta se ha producido con posterioridad al inicio de las clases o por causa sobrevenidas. Lo solicitará, a través del procedimiento electrónico, a la Coordinación del Máster, quien dará traslado al profesorado correspondiente, alegando y acreditando las razones que le asisten para no poder seguir el sistema de evaluación continua.

Por ello en las convocatorias oficiales se desarrollará un examen que se dividirá en los siguientes apartados:

- Prueba evaluativa escrita del temario de la asignatura.
- Trabajos escritos.

