MEDIDAS DE FIABILIDAD EN SISTEMAS CON REPARACIÓN PERFECTA

TRABAJO FINAL DEL MÁSTER

PRESENTADO POR: Liliana Adriana Mendoza S.

Universidad de Granada
Granada-España
septiembre 2012

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

1. Introducción y ejemplos

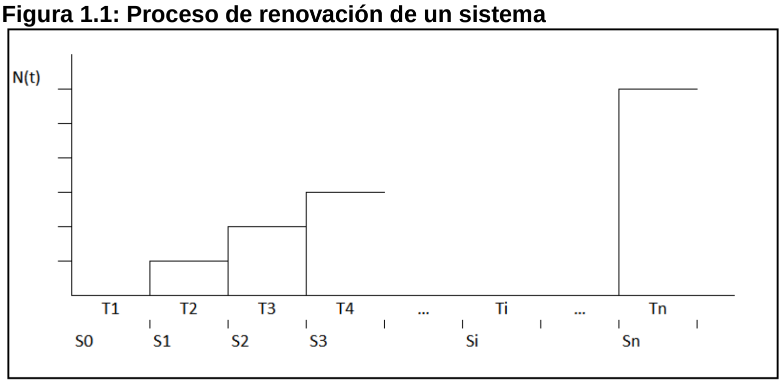
La teoría de renovación surge con el estudio de sistemas estocásticos cuya evolución en el tiempo viene determinada por ciclos de funcionamiento, es decir, intervalos de tiempo al principio de los cuales el sistema se reinicia cada vez, estadísticamente. El proceso de Poisson que puede considerarse como un modelo para la evolución en el tiempo de sistemas en los que los ciclos de funcionamiento son regidos por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial. Podemos considerar generalizaciones en este sentido, es decir suponer un proceso de recuento en el que los tiempos entre llegadas son independientes e idénticamente distribuidos con una distribución arbitraria. Tal proceso recibe el nombre genérico de proceso de renovación. (Ross, 2010, 422)

Un proceso de renovación, al que denotaremos a partir de ahora $N(t)$, se genera formando sumas parciales de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Cada variable T_i corresponde a un suceso, y $N(t)$ es una variable aleatoria que cuenta el número de sucesos ocurridos en el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Denotamos $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, que representa el instante de tiempo en que ocurre el $n - \acute{e}simo$ suceso. Llamaremos, a S_n tiempo de espera hasta la $n - \acute{e}sima$ llegada. Nos referiremos con el término proceso de renovación indistintamente a la secuencia $\{S_n;\ n \geq 0\}$ o bien a $\{N(t);\ t \geq 0\}$.

Como ya hemos dicho, suponemos que las variables T_i son independientes e idénticamente distribuidas como una variable T con función de distribución $F(t)$ y función de densidad $f(t)$

Figura 1.1: Proceso de renovación de un sistema



$N(t)$ cuenta los sucesos de fallo ocurridos en un periodo $(0, t]$
T_i: registra el tiempo transcurrido hasta desde el fallo $i - 1$ hasta el fallo i, y
S_n: registra el tiempo transcurrido hasta el fallo i

El objetivo principal de la teoría de renovación es deducir propiedades sobre ciertas variables asociadas al proceso a partir del conocimiento de las características de la variable T.

Antes de continuar veamos algunos ejemplos de procesos de renovación. Los ejemplos más estudiados que ilustran un proceso de renovación son: el proceso de Poisson, el contador, flujo de tráfico y los asociados a teoría de colas.

Ejemplo 1.1: Proceso de Poisson

El proceso de Poisson describe el número de eventos o renovaciones que suceden en un determinado tiempo. (Sarabia, 1996, 316) La variable aleatoria que representa el número de renovaciones tiene una distribución Poisson con parámetro (λt), es decir el promedio de eventos que suceden en el intervalo $(0, t]$.

La función de distribución de dicha variable aleatoria $N(t)$ está dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Para $t \geq 0$

Si se desea estudiar un sistema y su proceso de renovación para un lapso de tiempo, debe determinar el promedio de renovaciones y con ello se puede establecer el comportamiento en un intervalo de tiempo dado.

Si el sistema en estudio tiene una falla y requiere ser renovado, cada 4 minutos, entonces se tiene un proceso Poisson con parámetro $\lambda = 1/4$. La distribución del número de renovaciones es Poisson.
La probabilidad de tener una renovación en el primer minuto es 0.22, la de tener una renovación en el segundo minuto es 0.39, a medida que el tiempo avanza la probabilidad de tener una renovación es mayor, en el minuto 16 la probabilidad de tener una renovación del sistema es de 0.98, casi 1.

En otro caso, si la experiencia deja ver que el sistema requiere una renovación cada minuto el comportamiento de la distribución es mayor. Ahora la probabilidad de requerir una renovación del sistema en el minuto 4 es 0.98.

Ejemplo 1.2: Proceso contador

El proceso contador estudia las variables asociadas a la llegada de señales eléctricas a un dispositivo contador. En la teoría de señales el tiempo de llegada de una señal a un punto determinado, está asociado a la distancia del origen de la señal a dicho punto de referencia.

Ejemplo 1.3: Flujo de tráfico

El proceso de flujo de tráfico estudio la cantidad de vehículos, que pasan frente o a través de un punto determinado, así como sus otras variables asociadas de tiempo y frecuencia.

Si por ejemplo, se sabe que el promedio de autos que pasan por un peaje de carretera es de 10 autos cada 7 minutos. El evento de fallo es cuando el auto pasa por el punto de pago. En este momento el sistema se detiene para atender un conductor, el tráfico se detiene para esperar el turno de cada uno.

La probabilidad de tener una renovación en el sistema durante una hora. Luego de transcurridos 5 minutos la probabilidad de tener una renovación es de 1.

Ejemplo 1.4: Proceso de renovación asociado a teoría de colas

El proceso de renovación en un sistema de colas se presenta cuando el sistema produce un fallo y se detiene le sistema, y para volver a ponerlo en funcionamiento se requiere una renovación, con la característica que el sistema que tiene atención está en operación y cuando suspende la atención de la cola en espera, el sistema requiere una renovación.

Es el caso de un banco, el sistema de atención funciona cuando el cajero está atendiendo, cuando el cajero se detiene hay una falla y se debe reemplazar por otra persona para que el sistema funcione. El estudio de este aspecto del sistema de cola es estudiado como un proceso de renovación.

Ejemplo 1.5: Procesos de renovación asociados a cadenas de Markov

Sea $\{Y_n;\ n \geq 0\}$ una cadena de Markov recurrente. Supongamos que $Y_0 = i$ y consideremos los tiempos entre sucesivas visitas al estado i. Definimos

$$T_1 \ = \ min\,\{n \ > \ 0\colon Y_n = i\}$$

$$T_{k+1} \ = \ min\,\{n \ > \ T_k\colon Y_n = i\} - Y_k\,, \quad k = 1,2,\ldots$$

Como cada uno de estos tiempos se calcula desde el mismo estado de partida, la propiedad de Markov garantiza que $T_1, T_2, \ldots$ son v.a. independientes e idénticamente distribuidas de modo que generan un proceso de renovación.
En un proceso de Markov se puede estudiar el número de veces en las que el sistema se encuentra en un estado en particular, por ejemplo el estado i, este proceso se denomina de renovación cuando del proceso de Markov sale del estado i el sistema requiere una renovación.

Estos cinco ejemplos son ilustraciones prácticas de los procesos de renovación.

2. Elementos de un proceso de renovación

En esta sección vamos a introducir las medidas que caracterizan un proceso de renovación, con especial atención a la función de renovación. En este análisis preliminar nos damos cuenta de la necesidad de utilizar herramientas tradicionales del cálculo matemático como la convolución de funciones y la transformada de Laplace. Introduciremos lo que más adelante llamaremos ecuaciones de renovación, que serán ecuaciones integrales en términos de las variables del proceso.

2.1 Preliminares

Sea $\{T_n;\, n = 1,2,\ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas. Para mayor comodidad, sea $T =_{st} Tn$, se supone que $P\{T > 0\} > 0$ y que $P\{T < \infty\} = 1$, y llamamos F a la función de distribución de T. Se supone que T tiene momentos acotados, es decir existe la función generatriz de momentos. Sea $\mu = E[T]$ y $\gamma = \mu$–1.

Sea $S_0 = 0$ y $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, $n \geq 1$, y sea $N(t) = max\{n\colon \leq t\}$. Por tanto, Sn representa el tiempo en que ocurre la $n-\acute{e}sima$ renovación, le llamaremos a partir de ahora *tiempo de espera* hasta la llegada $n-\acute{e}sima$; y $N(t)$ es el número de renovaciones que ocurren en el intervalo $[0,t]$. Vamos a obtener a continuación la distribución de $N(t)$.

S_n es la suma de n variables aleatorias independientes, por tanto su función de distribución, que llamamos F_n, viene dada por la convolución de las funciones de distribución de las n variables, es decir, $F_n = F * F * \ldots * F$, para todo $n \geq 1$. Es decir, usando la definición dada por

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) * F(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)\,dF(x)$$

Es claro que, por la conmutatividad del operador convolución que $F_n = F_{n-1} * F = F * F_{n-1}$, para todo n.

La relación entre $\{S_n\}$ y $\{N(t)\}$ puede expresarse también de la siguiente forma

$$N(t) \geq n \ \ si\ y\ solo\ si\ \ S_n \leq t \qquad (2.1)$$

por tanto,

$$P\{N(t) \geq n\} = P\{S_n \leq t\} = F_n(t)\,, \quad t \geq 0,\ n = 1,2,\ldots$$

y

$$P\{N(t) = n\} = F_n(t),\ -F_{n+1}(t),\ t \geq 0, \quad n = 1,2, \qquad (2.2)$$

El número de renovaciones en un intervalo de tiempo finito permanece acotado, es decir $P\{N(t) < \infty\} = 1$, para $t < \infty$ Para comprobar esta afirmación procedemos como sigue

$$P\{N(t) = \infty\}$$

$$= P\{N(t) > n, para\ todo\ n \in N\}$$

$$= P\{S_{n+1} \leq t, para\ todo\ n \in N\},$$

donde la segunda igualdad viene dada por la equivalencia (2.1). Además, por la ley fuerte de los grandes números,

$$\frac{S_n}{n} \to E[X] > 0$$

cuando $n \to \infty$. Esto significa que S_n crece a infinito a medida que $n \to \infty$, por lo tanto, el suceso $\{S_n \leq t\}$ es cierto sólo para un número finito de valores de n, de lo que se deduce que $P\{N(t) < \infty\} = 1$.

Dado que $T_1, T_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas, si suponemos que $E[T] = \mu < \infty$ y $Var(T) = \sigma^2 < \infty$, de acuerdo con el teorema central del límite $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ se distribuye, asintóticamente, como una variable normal de media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Es decir, cuando n es grande

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

se distribuye aproximadamente $N(0{,}1)$. Esto nos permite admitir, para n grande, la siguiente aproximación

$$F_n(t) = P\{S_n \leq t\} \approx \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de una variable normal tipificada.
Este resultado, junto con las conclusiones siguientes a (2.1) puede aprovecharse para dar también resultados asintóticos relativos a $N(t)$. Para n grande,

$$P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t) \approx \phi\left(\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{t-(n+1)\mu}{\sigma\sqrt{(n+1)}}\right).$$

Además, en la sección 5, demostraremos la siguiente fórmula de aproximación alternativa, válida cuando t es grande

$$P\{N(t) \leq n\} \approx \phi\left(\frac{n - t/\mu}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu^3}}}\right).$$

Otras variables de interés en un proceso de renovación son las dadas en la siguiente definición.

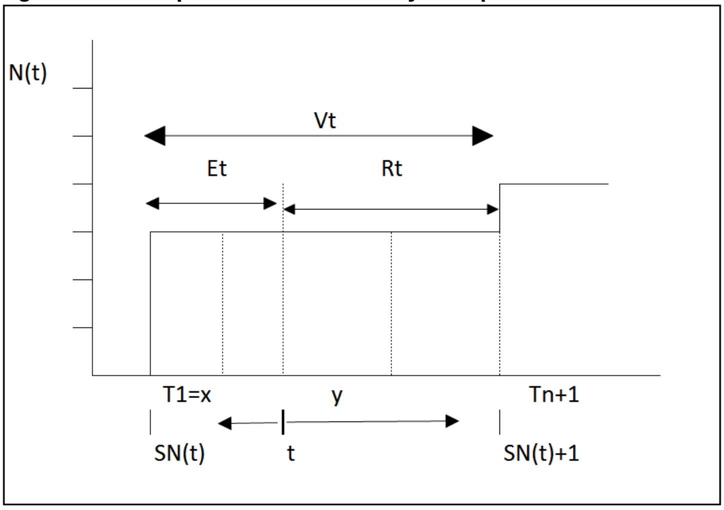
Definición 2.1

Fijado $t > 0$, llamaremos *vida residual* a la variable aleatoria dada por $R_t = S_{N(t)+1} - t$, es decir el tiempo transcurrido entre t y el instante de tiempo en que ocurre la siguiente renovación después de t.

La variable aleatoria *edad* viene dada por $E_t = t - S_{N(t)} - t$, representa el tiempo transcurrido desde el instante en que ocurre la última renovación antes de t y t.

Llamaremos *vida total* a la variable $V_t = E_t + R_t$. En la Figura 2.1 se da una descripción gráfica de todas estas variables. Estas variables serán estudiadas ampliamente en secciones posteriores.

Figura 2.1: Tiempos de vida residual y vida pasada



2.2 La función de renovación

Una de las características más importantes de un proceso de renovación es la que damos a continuación.

Definición 2.2

Dado $\{N(t);\ t\geq 0\}$ un proceso de renovación, llamamos *función de renovación* a $M(t) = E[N(t)]$, el número esperado de renovaciones en el intervalo $[0, t]$. (Medhi, 1994, 250)

La siguiente proposición proporciona interesantes resultados concernientes a la función de renovación. En primer lugar se da una expresión que relaciona $M(t)$ con la función F y a continuación se prueba que el número medio de renovaciones en un intervalo acotado es finito.

Proposición 2.3

(i) $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$
(ii) $M(t) < \infty$ para todo $0 \leq t < \infty$.

Demostración

(i) $M(t) = E[N(t)]$ por definición, por tanto tenemos la siguiente serie de igualdades (Medhi, 1994, 251):

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n * P\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n * (F_n(t) - F_{n+1}(t))$$

$$F_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) * F_{n+1}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} nF_{n+1}(t)$$

$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ (2.3)

(ii) Dada la definición de $F_n(t)$, podemos escribir

$F_n(t) = F_{n-m}(t) * F_m(t)$, para todo $0 \leq m \leq n$,

por tanto

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-m}(t-x) F_m(t) dx$$

$\leq F_{n-m}(t) \int_0^t f_m(x)dx = F_{n-m}(t) * F_m(t),$ (2.4)

Usando la relación (2.4) podemos decir que

$F_{nk+i}(t) \leq (F_k(t))^n \cdot F_i(t)$ (2.5)

Podemos elegir k de tal forma que $F_k(t) < 1$, cuya existencia está garantizada ya que $P\{T > 0\} > 0$, y sustituyendo en la expresión de $M(t)$ dada en (i), tenemos

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} F_{nk+i}(t)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_k(t)\right)^n \sum_{i=1}^{k} F_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^{k} F_i(t)}{1 - F_k(t)} < \infty \qquad \blacksquare$$

Las siguientes son algunas consideraciones sobre la función de renovación:

1. Algunos autores suponen que en el instante inicial se produce una renovación, de modo que el número medio de renovaciones hasta t sería $1+M(t) = E[1 + N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$, siendo $F_0(t) = 1$ para $t \geq 0$.
2. $M(t)$ es una función, por definición, no decreciente de t. Además es continua a la derecha, ya que cada $F_n(t)$ tiene esta propiedad y la serie converge uniformemente en cada intervalo finito. Salvo la condición del límite en ∞ (ver Teorema 3.1), $M(t)$ verifica las propiedades de una función de distribución, y, por tanto, podemos escribir expresiones como $\int h(t-y)dM(y)$, que se interpretan de la misma manera que si M fuese una función de distribución. En este contexto, tiene sentido generalizar el

concepto de convolución de funciones de distribución y extenderlo al caso de funciones crecientes.

Damos a continuación la definición de convolución para funciones no decrecientes.

Definición 2.4

Sean A y B funciones no decrecientes, continuas a la derecha y no negativas, con $A(0) = B(0) = 0$. Se define la convolución como

$$A * B(t) \int_0^t B(t–x)dA(x) = B * A(t)$$

Más adelante demostraremos que la función de renovación satisface la siguiente ecuación

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t–x)dF(x) = F(t) * M(t) \qquad (2.6)$$

$t \geq 0$, es decir, que la función de renovación satisface lo que llamaremos una *ecuación de renovación.*

Ya que la ecuación (2.3) implica convoluciones de funciones de distribución, resulta complicada de manipular, de manera que en adelante haremos uso de la transformada de Laplace, esto es

$$M^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} M(t)\, dt$$

Usando la relación dada en (2.3) y también las propiedades de integral y convolución de la transformada de Laplace, se tiene

$$M^*(s) = \frac{\varphi_T(s)}{s(1-\varphi_T(s))} \qquad (2.7)$$

donde $\varphi_T(s)$ denota la transformada de Laplace de la función de densidad de T. (Medhi, 1994, 252)

Ejemplo 2.5

Supongamos un proceso de Poisson de parámetro λ, los tiempos entre llegadas son variables aleatorias independientes y exponenciales, por tanto T tiene función de densidad $f(t) = e^{-\lambda t}$, cuya transformada de Laplace viene dada por $\varphi_T(s) = \lambda/(\lambda + s)$, entonces, aplicando la ecuación (2.7),

$$M^*(s) = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{s(1-\frac{\lambda}{s+\lambda})} = \frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{\frac{s(s+\lambda)-s\lambda}{s+\lambda}} = \frac{\lambda}{s^2}$$

con lo cual $M(t) = \lambda t$.

Ejemplo 2.6

Supongamos a continuación un proceso de renovación Erlang. Vamos a considerar que T tiene distribución Erlang de índice 2 y parámetro 2λ. En este caso,

$$\varphi_T(s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s}\right)^2$$

y sustituyendo en (2.7)

$$M^*(s) = \frac{2\lambda^2}{s^2(4\lambda+s)}$$

Invirtiendo esta expresión obtenemos

$$M(t) = \lambda t - \frac{1-e^{-4\lambda t}}{4}$$

2.3 Cotas para la función de renovación

A menudo resulta difícil obtener una expresión exacta para $M(t)$ de modo que recurrimos a cotas y fórmulas de aproximación. Es claro que

$$max\ T_i \leq \sum_{j=1}^{n} T_j = S_n$$

entonces, $F_n(t) = P\{max\ T_i \leq t\} = (F_k(t))^n$. Como consecuencia

$F(t) = F_1(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_k(t)\right)^n = \frac{F(t)}{1-F(t)}$,

es decir,

$$F(t) \leq M(t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)}$$

Como el número de renovaciones en el instante t es $N(t)$, se tiene que $t \leq S_{N(t)+1}$. Tomando la esperanza y aplicando un resultado que adelantamos y que justificaremos posteriormente

$t \leq E[S_{N(t)+1}] = \mu(M(t)+1),$

de donde se obtiene la siguiente cota inferior para la función de renovación

$$M(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1$$

Puede consultarse una lista completa de cotas para la función de renovación suponiendo ciertas condiciones sobre F.

2.4 Densidad de renovación

Cuando la v.a. subyacente en el proceso, cuya función de distribución F, es continua con función de densidad f, se puede dar la siguiente definición.

Definición 2.7

Llamamos *densidad de renovación*

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} \tag{2.8}$$

Esta cantidad nos da una medida de la razón de llegadas del proceso a la recta de tiempos. Por ejemplo, en el proceso de Poisson, $m(t)$ es constante, lo que significa que la probabilidad de tener una renovación en un intervalo $(t, t+\Delta t)$ es la misma para todo t.

No debe confundirse el término *densidad de renovación* con una función de densidad de probabilidad, sí puede considerarse aquí la palabra densidad en términos físicos como una medida de masa por unidad de espacio, interpretando masa como renovaciones y espacio como tiempo.

Podemos escribir

$$m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t}$$

Si Δt es pequeño, podemos decir que $M(t+\Delta t) - M(t) = E[I_{(t,t+\Delta t)}]$, donde

$$I_{(t,t+\Delta t)} = \begin{cases} 1, & si\ (t, t+\Delta t)\ contiene\ una\ renovación \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.9}$$

De manera que, para Δt pequeño, $m(t)\Delta t$ es la probabilidad de una renovación en el intervalo $(t, t+\Delta t)$, es decir que $m(t)$ puede interpretarse como la densidad de las renovaciones en el tiempo.

Cuando hablamos de la intensidad de renovación en un Proceso de Poisson No Homogeneo, en teoría de fiabilidad, la función $m(t)$ también se llama *razón de ocurrencia de fallos* - ROCOF, ya que si consideramos las renovaciones como fallos que ocurren en un sistema, $m(t)$ se interpreta como el número medio de fallos por unidad de tiempo, y, razonando igual que arriba (2.9), cuando se considera un intervalo de amplitud infinitesimal, $m(t)\Delta t$ es la probabilidad de fallo en el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

A la vista de (2.6) y (2.8), podemos dar la siguiente ecuación, utilizando las propiedades de la transformada de Laplace,

$$m^*(s) = \varphi_T(s) + m^*(s)\varphi_T(s)$$

Definición 2.10

Se dice que un proceso de renovación es *estacionario* si la densidad de renovación $m(t)$ es independiente de t.

Con esto, el proceso de Poisson es un proceso de renovación estacionario, mientras que el proceso de renovación Erlang no lo es.

3. Comportamiento límite

En el siguiente teorema explicamos el comportamiento en el límite del número de renovaciones, el número medio de renovaciones y la densidad de renovación.

Teorema 3.1

i) $N(t) \xrightarrow{c.s.} \infty$ si $t \to \infty$

ii) $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{c.s.} \gamma$ si $t \to \infty$ siendo $\gamma = \frac{1}{E[X]}$

iii) $M(t) \longrightarrow \infty$ si $t \to \infty$

iv) $\lim_{t\to\infty} m(t) = \gamma$

Demostración

(i) Los sucesos $\{N(t) > n\}\ y\ \{S_{n+1} \le t\}$ son equivalentes, lo que implica que

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} N(t) > n\right\} = P\ \{S_{n+1} < \infty\}$$

Para que $S_{n+1} = \infty$ tiene que ocurrir que al menos uno de los $n+1$ tiempos entre llegadas sea infinito, lo cual ocurre con probabilidad 0. Por tanto,

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} N(t) > n\right\} = 1$$

(ii) Vamos a considerar la variable aleatoria $S_{N(t)}$, que representa el instante de tiempo en que ocurre la última renovación antes de t. De la misma forma, $S_{N(t)+1}$ representa el instante en que ocurre la primera renovación justo después de t. Es claro que se da la siguiente cadena

$$S_{n+1} \le\ t\ <\ S_{N(t)+1}$$

por tanto,

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)}\ <\ \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

Como $S_{N(t)}/N(t)$ es el promedio de los $N(t)$ primeros tiempos entre llegadas, se sigue, por la ley fuerte de los grandes números que $S_{N(t)}/N(t) \to \mu$, según que $N(t) \to \infty$, pero esto último ocurre si $t \to \infty$, de modo que podemos decir que

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

si $t \to \infty$.

Si ahora escribimos

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \left(\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right)\left(\frac{N(t)+1}{N(t)}\right)$$

podemos razonar de manera que

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \to \mu$$

si $t \to \infty$.

Con esto el resultado es inmediato, ya que $t/N(t)$ está acotado por dos cantidades que convergen a μ, a medida que t se hace infinito. (Ross, 2010, 428)

(iii) Utilizando la ecuación (2.7) y la propiedad de la transformada de Laplace según la cual

$$\lim_{t \to \infty.} M(t) = \lim_{s \to 0.} sM^*(s)$$

tenemos que

$$\lim_{t \to \infty.} M(t) = \lim_{s \to 0.} \frac{\varphi_T(s)}{(1 - \varphi_T(s))}$$

El resultado se deduce del hecho de que $\lim_{s \to 0.} \varphi_T(s) = 1$.

(iv) Para demostrar esta parte, también haremos uso de las propiedades de la transformada de Laplace. Dado que $m(t) = M'(t)$, tenemos que

$m*(s) = s \cdot M*(s) - M(0^-)$,

por tanto,

$$m*(s) = \frac{\varphi_T(s)}{(1 - \varphi_T(s))}$$

Además,

$$\lim_{t \to \infty.} m(t) = \lim_{s \to 0.} sm^*(s) = \lim_{s \to 0.} \frac{\varphi_T(s)}{(1 - \varphi_T(s))}$$

Este límite es indeterminado, ya que la transformada de la función de densidad de una variable aleatoria toma valor 1 en $s = 0$, de modo que usamos la regla de l'Hôpital

$$\lim_{t\to\infty.} m(t) = \lim_{s\to 0.} \frac{\varphi_T(s) + s\varphi_T(s)}{-\varphi_T(s)}$$

como $\varphi_T(s) = -E[T] = -\frac{1}{\gamma}$, se obtiene finalmente (iv). ■

El apartado (i) establece que a medida que el tiempo pasa, el número de renovaciones crece indefinidamente. En el apartado (ii) se trata de determinar la razón de crecimiento de $N(t)$, así, $\gamma = 1/E[T]$ recibe el nombre de *razón de renovación.*

En el apartado (iii) del resultado anterior hemos visto que el número esperado de renovaciones crece indefinidamente con el tiempo, el siguiente teorema, llamado teorema elemental de renovación, trata de obtener la razón de ese crecimiento. En el apartado (ii) hemos visto que $N(t)/t \to\gamma$, a medida que t crece, y ya que $M(t) = E[N(t)]$, podríamos pensar que $M(t)/t \to\gamma$ se deduce inmediatamente de (ii). El siguiente ejemplo demuestra que esta afirmación no es cierta en general.

Ejemplo 3.1

Sea $\{Y_n;\ n = 0,1,\dots\}$ una sucesión de variables aleatorias dadas por

$$P\{Y_n = y\} = \begin{cases} \dfrac{n}{(n+1)}, & y = 0 \\ \dfrac{1}{(n+1)}, & y = n+1 \end{cases}$$

Claramente, $E[Y_n] = 1$. También es fácil ver que $P\{\lim_{t\to\infty.} Y_n = 0\} = 1$, es decir $Y_n \overset{c\,s}{\to} 0$. De modo que hemos comprobado que en general no es cierto que $Y_n \overset{c\,s}{\to} Y \;\Rightarrow\; E[Y_n] \to E[Y]$

Pueden consultarse otros ejemplos en el texto de Ross (1983). Para demostrar el teorema elemental de renovación haremos uso de las ecuaciones de renovación que estudiamos en la siguiente sección.

4. Ecuaciones de renovación

En esta sección introducimos las herramientas necesarias para el tratamiento de procesos de renovación. Éstas vienen dadas como la solución y las propiedades asintóticas de la solución de las llamadas ecuaciones de renovación.

4.1 Definición y primeras propiedades

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema elemental de renovación, que como ya indicamos anteriormente, no se deduce inmediatamente de los resultados de la sección 3. En primer lugar vamos a establecer las condiciones adecuadas para formular el teorema.

Definición 4.1

Una ecuación integral de la forma

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \ \ t \ \geq \ 0 \tag{4.1}$$

se llama *ecuación de renovación* (Medhi, 1994, 255). Las funciones conocidas son $a(t)$ y la función de distribución $F(t)$, mientras que la indeterminada es $A(t)$. Podemos escribir la ecuación (4.1) utilizando la notación de convolución de funciones crecientes, es decir, $A(t) = a(t) + F * A(t)$. Como ya adelantamos en la Definición 2.4, vamos a ver a continuación, que la función de renovación satisface una ecuación del tipo (4.1) en la cual $a(t) = F(t)$.

Teorema 4.1

Supongamos que a es una función acotada. Existe una y sólo una función A acotada en intervalos finitos que satisface (4.1). Esta función es

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x), \tag{4.2}$$

donde $M(t) \ = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ es la función de renovación.

Demostración.

En primer lugar, vamos a comprobar que una función A como en (4.2) satisface las condiciones de acotación y resuelve (4.1). Dado que a es acotada y que M es no decreciente y finita para cada T, tenemos

$$\sup_{0\leq t\leq T} |A(t)| \leq \sup_{0\leq t\leq T} |a(t)| + \int_o^T \left\{ \sup_{0\leq t\leq T} |a(y)| \right\} dM(x)$$

$$= \sup_{0 \le t \le T} |a(t)| * \{1 + M(t)\} < \infty$$

con lo cual la expresión (4.2) es acotada en intervalos finitos. Comprobamos a continuación que $A(t)$ satisface (4.1).

$$A(t) = a(t) + M * a(t)$$

$$= a(t) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a(t)$$

$$= a(t) + F_1 * \left\{a(t) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} F_k\right) * a(t)\right\}$$

(por las propiedades de la convolución)

$$= a(t) + F * a(t) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} F_k\right) * a(t)$$

(ya que $F_k = F * F_{k-1}$)

$$= a(t) + F * A(t).$$

Para concluir la demostración, sólo falta comprobar la unicidad de A, es decir que cualquier solución de la ecuación de renovación (4.1) viene dada por (4.2). En primer lugar, vamos a expresar la ecuación (4.1) usando la notación de convolución de funciones, esto es $A(t) = a(t) + F * A(t)$. Si en esta expresión sustituimos $A(t)$ en el miembro de la derecha obtenemos,

$$A = a + F * (a + F * A)$$

$$= a + F * a + F * (F * A)$$

$$= a + F * a + F_2 * A$$

Repitiendo este procedimiento, obtenemos

$$A = a + F * a + F_2 * (a + F * A)$$

$$= a + F * a + F_2 * a + F_3 * A$$

$$= \ a + \left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k\right) * a + \ F_n * A$$

Veamos a continuación que el último sumando se aproxima a 0 conforme n crece indefinidamente. En efecto,

$$|F_n * A(t)| \ = \left|\int_0^t A(t-x)dF_n(x)\right|$$

$$\leq \left\{\sup_{0\leq x\leq T} |A(t-x)|\right\} \times F_n(\mathrm{t})$$

Ya que A es acotada en intervalos finitos, y $lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0$, se tiene que $lim_{n\to\infty} |F_n * A(t)| = 0$ para cada t fijo. De la misma forma, como a es acotado, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k\right) * a(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a(t) = M * a(t)$$

de modo que

$$A(t) = \ a(t) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} F_k * a(t) + F_n * A(t)\right) = a(t) + M * a(t)$$

con lo que la solución general de (4.1) tiene la forma (4.2) necesariamente probando así la unicidad. ■

Si tomamos $a(t) = F(t)$, se tiene trivialmente que la función de renovación $M(t)$, satisface la ecuación de renovación $M(t) = F(t) + F * M(t)$.

Lema 4.3

Dado un proceso de renovación $\{N(t);\ t > 0\}$ de tiempos de espera $\{S_n;\ n \geq 0\}$,

$$E[S_{N(t)+1}] \ = \ \mu \cdot [M(t) + 1]$$

siendo μ el tiempo medio entre dos llegadas consecutivas y $M(t)$ la función de renovación.

Demostración.

Tomamos en el Teorema 4.2 $A(t) = E[S_{N(t)+1}]$. Por las propiedades de esperanza condicionada,

$$E[S_{N(t)+1}] = E[E[S_{N(t)+1}]|T_1]$$
$$= \int_0^{\infty} [E[S_{N(t)+1}|T_1 = x]dF(x) \qquad (4.3)$$

y, desarrollando cada término

$$E[S_{N(t)+1}|T_1 = x] = \begin{cases} x, & x > t \\ x + A(t-x), & x \leq t \end{cases}. \qquad (4.4)$$

Sustituyendo (4.4) en (4.3)

$$\begin{aligned} E\left[S_{N(t)+1}\right] &= \int_0^t \big(x + A(t-x)\big)dF(x) + \int_t^{\infty} xdF(x) \\ &= \int_0^{\infty} xdF(x) + \int_0^t A(t-x)dF(x) \\ &= E\,[X_1] + \int_0^t A(t-x)dF(x) \end{aligned}$$

De modo que la función $A(t)$ verifica la ecuación de renovación

$$A(t) = a(t) + F*A(t)$$

donde $a(t) = E[T_1] = \mu$ y, por el Teorema 4.2, la solución de esta ecuación es

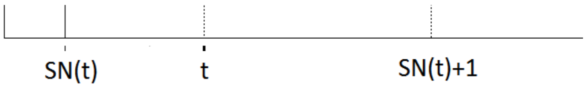
$$A(t) = a(t) + M*a(t)$$

pero por la forma de la función *a*, tenemos que
$A(t) = E\left[S_{N(t)+1}\right] = \mu + \int_0^t \mu\, dM(x) = \mu\,[1 + M(t)]$.

lo que completa la prueba. ■

Como consecuencia del lema anterior, podemos obtener una expresión para la vida media residual a partir de un tiempo t ya que $R_t = S_{N(t)+1} - t$, ver Figura 4.1, es decir que $E[R_t] = \mu \cdot [M(t) + 1] - t$.

Figura 4.1: Tiempos residuales



4.2 Teorema elemental de renovación

El siguiente resultado, teorema elemental de renovación, (Nakagawa, 2011, 55) establece que el número medio de renovaciones por unidad de tiempo se aproxima al inverso del tiempo medio entre dos renovaciones, cuando el proceso es largo tiempo observado.

Teorema 4.4: Teorema elemental de renovación

La razón de renovación esperada verifica

$$\frac{M(t)}{t} \to \gamma \tag{4.5}$$

cuando t $\to \infty$.

Demostración.

Supongamos que $\mu < \infty$. Es claro que $S_{N(t)+1} < t$, ver Figura 4.1, por tanto, aplicando el Lema 4.3, concluimos que $\mu \cdot [M(t)+1] > t$, lo que implica que

$$lim\ inf_{t\to\infty}\left(\frac{M(t)}{t}\right) \geq \frac{1}{\mu} \tag{4.6}$$

Fijamos una constante K y definimos el siguiente proceso de renovación

$$\{\bar{X}_n, n = 1,2,\dots\}$$

de la siguiente forma

$$\bar{X}_n = \begin{cases} X_n, & X_n \leq K \\ K\ , & X_n > K \end{cases}$$

$\mathrm{n} = 1,2,\dots.$

Sean $\bar{S}_n$ los tiempos de llegada de este proceso truncado y $\bar{N}\,(t) = sup\,\{n: \bar{S}_n \leq t\}$. Es fácil ver que, en este caso, $\bar{S}_{N(t)+1} \leq t + K$. Por tanto, de nuevo por el Lema 4.3, se tiene que $(\bar{M}(t)+1)\mu_k \leq t + K$, donde $\mu_k = E[\bar{X}]$, de manera que

$$\lim_{t\to\infty} sup\left(\frac{\bar{M}(t)}{\mathrm{t}}\right) \leq \frac{1}{\mu_k}$$

Como $\bar{S}_n \leq Sn$, se tiene que $\bar{N}(t) \geq N(t)$ y por tanto $\bar{M}(t) \geq M(t)$, de manera que

$$\underset{t\to\infty}{lim\ sup}\left(\frac{M(t)}{\mathrm{t}}\right) \le \frac{1}{\mu_k}$$

Haciendo ahora $K\to\infty$, tenemos que

$$\lim\ sup_{t\to\infty}\left(\frac{\bar{M}(t)}{\mathrm{t}}\right) \le \frac{1}{\mu} \tag{4.7}$$

que junto con la (4.6), concluye la demostración del teorema. ■

Vamos a justificar mediante un modelo de reemplazamiento que el resultado del Teorema 4.4 es algo intuitivo. Sean $T_1, T_2, \ldots$ los tiempos de vida de dispositivos que se ponen en servicio sucesivamente (lámparas, transistores, máquinas,...), de manera que cada dispositivo comienza su servicio inmediatamente después del fallo del dispositivo anterior. Podemos suponer que las variables $T_1, T_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas con media finita $E[T_i] = \mu$. Como cada mecanismo dura, en promedio, μ unidades de tiempo, es de esperar que los reemplazamientos ocurran en promedio a razón de $1/\mu = \gamma$ por unidad de tiempo. Es decir, en efecto esperamos que.

$$\frac{M(t)}{t} \to \gamma$$

5. El teorema de renovación

El resultado que probaremos en esta sección establece, entre otras cosas, que, bajo ciertas condiciones sobre la función de distribución $F(t)$, para cualquier $h > 0$,

$$\frac{M(t+h)-M(t)}{h} \to \frac{1}{\mu} \qquad (5.1)$$

cuando $t \to \infty$. Este resultado puede interpretarse como una forma diferencial del teorema elemental de renovación, y constituye uno de los resultados más importantes en probabilidad. La expresión (5.1) dice que el número esperado de renovaciones en un intervalo de amplitud h es aproximadamente h/μ, dado que el proceso lleva mucho tiempo en marcha.

5.1 Enunciado del teorema

Antes de pasar a enunciar el teorema, vamos a definir algunos conceptos que vamos a necesitar.

Definición 5.1

Dada F función de distribución, un punto α se llama *punto de crecimiento* si, para todo $\varepsilon > 0$

$$F(\alpha+\varepsilon) - F(\alpha-\varepsilon) > 0$$

Una función de distribución se dice *aritmética* si existe un $\lambda > 0$ tal que los únicos puntos de crecimiento de la función están entre los puntos 0, $\pm\lambda$, $\pm 2\lambda$, ... El mayor de los valores de λ con esta propiedad se llama *periodo.*

Si una función de distribución tiene una parte continua, no es aritmética. Un ejemplo de función de distribución aritmética con periodo 1 puede ser cualquiera que tome valores 0,1,2,...

Definición 5.1

Sea g una función definida sobre $[0, \infty)$. Para cada $\delta > 0$
y cada $n = 1,2, \ldots$, sean

$$\underline{m}_n = min\{g(t) \colon (n-1)\delta \leq t \leq n\delta\}$$

y

$$\overline{m}_n = max\{g(t) \colon (n-1)\delta \leq t \leq n\delta\}$$

y definimos

$$\underline{\sigma}(\delta) = \delta\sum_{n=1}^{\infty}\underline{m}_n$$

y

$$\overline{\sigma}(\delta) = \delta\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m}_n$$

Se dice que g es *directamente Riemann integrable* si las series $\underline{\sigma}(\delta)$ y $\overline{\sigma}(\delta)$ convergen absolutamente para todo $\delta > 0$ y la diferencia $\underline{\sigma}(\delta) - \overline{\sigma}(\delta) \to 0$, cuando $\delta \to 0$.

Teorema 5.1: Teorema básico de renovación

Sea F la función de distribución de una variable aleatoria con media μ. Supongamos que a es directamente Riemann integrable y que A es la solución de la ecuación de renovación

$A(t) = a(t) + F * A(t)$, (5.21)

(i) Si F no es aritmética, entonces

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^{\infty} a(x)dx\,, & \mu < \infty \\ 0 \quad\quad\quad\quad , & \mu = \infty \end{cases}$$

(ii) Si F es aritmética con periodo λ, entonces, para $0 \le c < \lambda$,

$$\lim_{n\to\infty} A(c + n\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(c + n\lambda)\,, & \mu < \infty \\ 0 \quad\quad\quad\quad , & \mu = \infty \end{cases}$$

Como consecuencia del teorema tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2: **Teorema de Blackwell**

En un proceso de renovación con distribución subyacente F no aritmética se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}(M(t+h) - M(t)) = \frac{h}{\mu}$$

para $h > 0$.

Demostración.

Sea $h > 0$ y consideremos la siguiente función

$$a(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < h \\ 0, & y \geq h \end{cases}$$

Sustituyendo a en la ecuación de renovación (5.2) y tomando $t > h$, se tiene que $A(t) \ = \ M(t) – M(t – h)$. Además

$$\int_0^\infty a(t)dt = h$$

por tanto, si F no es aritmética, por el Teorema 5.1.,

$$\lim_{t\to\infty}[M(t) - M(t-h)] = \frac{h}{\mu}$$

con el convenio de que $h/\mu \ = \ 0$ cuando $\mu \ = \ \infty$. ■

Si F es aritmética, la conclusión es la misma, siempre que h sea un múltiplo del periodo λ.

Puede comprobarse que el teorema de Blackwell es también una condición suficiente para el teorema básico de renovación. Esta conclusión se basa en el hecho de que una función directamente Riemann integrable se puede aproximar por funciones a saltos.

El teorema elemental de renovación (Teorema 4.4) es una consecuencia del teorema básico de renovación. (Teorema 5.1) En primer lugar suponemos que F no es aritmética, y llamamos $b_n = M(n+1) – M(n)$, entonces, por el Teorema 5.2, $b_n \to \frac{1}{\mu}$si $n \to \infty$, de manera que la sucesión promedio de b_n, converge al mismo límite, es decir

$$\lim_{n\to\infty.} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \lim_{n\to\infty.} \frac{M(n)}{n} = \frac{1}{\mu}$$

Sea ahora $t > 0$ arbitrario, y denotemos mediante $[t]$ la parte entera de t, es decir el mayor entero menor o igual que t. Dado que $M(t)$ es una función monótona, podemos deducir la siguiente serie de desigualdades

$$\frac{[t]}{t}\ \frac{M([t])}{[t]} \leq \frac{M(t)}{t} < \frac{[t]+1}{t}\ \frac{M([t]+1)}{[t]+1}$$

de manera que $M(t)/t$ es una función acotada por dos cantidades que tienden a $1/\mu$, y por tanto, $\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{M(t)}{t}\right\} = \mu^{-1}$

Si F es aritmética con periodo λ, llamamos $b_n, = M((n+1)\lambda) - M(n\lambda)$, y razonamos de manera análoga al caso de F no aritmética.

5.2 Aplicaciones del teorema de renovación

El Teorema 5.1 es un resultado muy importante y útil, usado principalmente cuando se quiere calcular el valor límite de $g(t)$, siendo ésta alguna probabilidad o esperanza en el tiempo. La técnica que se emplea consiste en obtener una ecuación de renovación para $g(t)$ condicionando sobre el tiempo de la última renovación que ocurre antes de t. Esto nos llevará a g como una solución de una ecuación de renovación, es decir del tipo $g = h + F * g$.

5.2.1 Distribución límite del tiempo de vida residual

Sea $R_t = S_{N(t)+1} - t$, el tiempo de vida residual a partir de t, y sea para $z > 0$ la siguiente función

$$A_z(t) = P\{R_t > z\}$$

Vamos a construir una ecuación de renovación para $A_z(t)$ condicionando sobre el suceso $T_1 = x$,

$$\mathrm{P}\{\mathrm{R_t} > z | T_1 = x\} = \begin{cases} A_z(t-x) & si \quad 0 < x \leq t \\ 0 & si \quad t < x \leq t+z \\ 1 & si \quad t+z < x \end{cases} \tag{5.3}$$

entonces, como

$$A_z(t) = \int_0^\infty \mathrm{P}\{\mathrm{R_t} > z | T_1 = x\} \mathrm{dF(x)}$$

se tiene, aplicando (5.3),

$$A_z(t) = \bar{F}(t+z) + \int_0^t A_z(t-x) \mathrm{dF(x)}$$

que es una ecuación de renovación cuya solución viene dada, según el Teorema 4.4, por

$$A_z(t) = \bar{F}(t+z) + \int_0^t \bar{F}(t+z-x) \mathrm{dM(x)}$$

Para aplicar el teorema de renovación, consideremos $a(t) = \overline{\mathrm{F}}\,(t+z)$, que es una función directamente Riemann integrable por ser monótona y absolutamente integrable en el sentido de que

$$\int_0^{\infty} |a(t)|dt = \int_0^{\infty} \bar{F}(t+z)dt = \int_Z^{\infty} \bar{F}(t)dt \leq \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt = \mu < \infty$$

Entonces,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mathrm{R_t} > z\} = \lim_{t\to\infty} A_z(t) = \frac{1}{\mu}\int_z^{\infty} \bar{F}(t)\,dt \qquad (5.4)$$

lo que nos da la distribución límite del tiempo de vida residual. La distribución dada en (5.4) es lo que llamaremos *distribución de equilibrio*, denominación que justificaremos más adelante.

A partir de aquí es posible obtener la distribución límite conjunta de las variables aleatorias edad E_t, y vida residual R_t. En concreto, vamos a determinar $\lim_{t\to\infty} P\{E_t \geq x, R_t \geq y\}$ para cada $x, y \geq 0$. Consideremos la siguiente cadena de equivalencias entre sucesos

$$\{R_{t-x} \geq x+y\} \Leftrightarrow \{S_{N(t-x)+1} - (t-x) \geq x+y\} \Leftrightarrow \{S_{N(t-x)+1} - t \geq y\}$$

Los sucesos $\{R_{t-x} \geq x+y\}$ y $\{E_t < x\}$ son incompatibles, ver Figura 2.1, por tanto

$\{R_{t-x} \geq x+y\} \Leftrightarrow \{R_{t-x} \geq x+y, E_t \geq x\}$.

Si suponemos que el suceso $\{E_t \geq x\}$ es cierto, entonces $N(t-x) = N(t)$, de modo que, uniendo todas las equivalencias llegamos a la conclusión de que

$\{R_{t-x} \geq x+y\} \Leftrightarrow \{E_t \geq x, R_t \geq y\}$,

y aplicando (5.4) obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} P\{E_t \geq x \;\; y \;\; R_t \geq y\} = \lim_{t\to\infty} P\{R_{t-x} > x+y\} = \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty} \bar{F}(t)\,dt$$

la distribución límite conjunta de (E_t, R_t). A partir de aquí, se puede deducir la distribución marginal límite de la variable E_t,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mathrm{E_t} \geq x\} = \frac{1}{\mu}\int_x^{\infty} \bar{F}(t)\,\mathrm{dt}$$

Utilizando el teorema del cambio de variable (pueden verse otros razonamientos en Karlin & Taylor, 1975), podemos determinar también la distribución límite de $V_t = E_t + R_t$, obteniéndose que

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\mathrm{V_t} > x\} = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty y dF(t) \tag{5.5}$$

Vamos a llamar $G(x) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{V_t \leq x\}$ Si calculamos a partir de (5.5) la media correspondiente a la distribución G, obtenemos que

$$\int_0^\infty x dG(t) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty x^2 dF(t) = \frac{E[X^2]}{\mu} \tag{5.6}$$

Según la desigualdad de Schwarz, dada una variable aleatoria,

$$E[X]^2 \leq E[X^2] \tag{5.7}$$

dándose la igualdad únicamente en el caso degenerado. Considerando conjuntamente (5.6) y (5.7), tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} E[V_t] > \mu,$$

lo que significa que la media del tiempo de vida total límite de un objeto que está en marcha actualmente es estrictamente mayor que un tiempo de vida medio ordinario, este hecho es conocido como la *paradoja de la vida residual.*

5.2.2 Desarrollo asintótico de la función de renovación

Suponiendo que F es una función de distribución no aritmética y que tiene varianza finita σ^2, es posible determinar, haciendo uso del teorema básico de renovación el segundo término del desarrollo asintótico de $M(t)$, es decir se puede probar que

$$\lim_{t\to\infty} \left\{M(t) - \frac{t}{\mu}\right\} = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$$

La demostración de este resultado es similar al procedimiento usado en (1) y puede verse en Karlin & Taylor (1975).

5.3 Distribución conjunta de la edad y vida residual

En anteriores apartados hemos obtenido la distribución límite de la variable bidimensional (E_t, R_t), es decir calculamos $\lim_{t\to\infty} P\{E_t \geq x, R_t \geq y\}$

Ahora estamos interesados en determinar, dado t, la densidad conjunta de la variable $Z_t = (E_t, R_t)$.

Podemos considerar dos casos, en primer lugar suponemos que $E_t = t$, lo que significa que la primera renovación ocurre después de t, es decir, t *cae* en el primer intervalo de renovación, de modo que podemos escribir

$$f_{Z_t}(t, y) = f_X(t + y)$$

para $y \geq 0$. El otro caso es que $E_t = t$. $E_t = x$ y $R_t = y$ ocurre si ocurre una renovación en $t–x$, de manera que la duración esta etapa es $x + y$. La probabilidad de una renovación en un itervalo $(t–x, t–x + dx)$ es aproximadamente $m(t–x)dx$. Igualmente, la probabilidad de que una etapa de renovación tenga longitud contenida en $(x + y, x + y + dy)$ es, aproximadamente $f_X(t + y)dy$. Con todo esto, podemos escribir

$$f_{Z_t}(t, y)dxdy \approx m(t - x)dxf_X(x + y)dy$$

como dx y dy se aproximan a 0, tenemos

$$f_{Z_t}(t, y) = m(t - x)f_x\ (x + y) \tag{5.8}$$

Integrando en y la expresión anterior podemos obtener la distribución de la variable edad

$$f_{A_t}(x) = m(x - y)\bar{F}_X(x),\ \ x < t.$$

Si hacemos t tender a infinito la expresión (5.8), obtendremos la distribución límite obtenida en la sección anterior. Llamamos $f_Z(x, y)$ a la función de densidad de esa distribución límite. Ya que $t \to \infty$, únicamente tiene sentido el caso $E_t < t$, por tanto, la distribución límite es

$$f_Z(x, y) = \gamma f_X(x, y)$$

A partir de aquí podemos obtener las distribuciones límite de las variables edad y vida residual

$$f_E(x) = \gamma \bar{F}_X(x)$$

$$f_R(y) = \gamma \bar{F}_X(y) \tag{5.9}$$

Podemos calcular a partir de aquí los momentos de estas dos variables aleatorias, para ello vamos a usar la representación de la esperanza de una variable en términos de su función de supervivencia,

$$E[X^k] = k\int_0^{\infty} x^{k-1}\bar{F}_X(x)dx$$

$k = 1, 2, \ldots$ Aplicando esta fórmula a las variables edad y vida residual tenemos

$$E[E^k] = E[R_t] = \frac{E[X^{k+1}]}{(k+1)E[X]}$$

Ejemplo 5.1: Proceso de renovación uniforme

Consideremos un proceso de renovación en el que T se distribuye uniformemente en $[0{,}1]$, de manera que $\gamma = 1/E[T] = 2$ y $F_t(t) = t,\ 0 \le t \le 1$. La edad de un punto aleatoriamente seleccionado tiene densidad

$$f_E(t) = 2(1-t)$$

y la esperanza $E[E] = 1/3$.

Ejemplo 5.2: El proceso de Poisson

Si consideramos el proceso de Poisson como un proceso de renovación, la distribución de las variables edad y vida residual viene dada por

$$f_{Z_t}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & 0 \le x \le t\,, 0 \le y \\ \lambda e^{-\lambda(x+y)}, & x = t, 0 \le y \end{cases}$$

Cuando $t \to \infty$, la densidad de Z_t se aproxima al producto de dos densidades exponenciales de parámetro λ, de manera que, en el límite, las variables edad y vida residual son exponenciales e independientes.

5.4 Distribución asintótica del proceso de renovación

Vamos a demostrar a continuación un resultado cuyo enunciado adelantamos en la sección 2.1. Veremos que $N(t)$ se distribuye cuando $n \to \infty$, como una variable normal. Para demostrarlo, haremos uso del teorema central del límite y de la relación

$N(t) < n \Leftrightarrow Sn > t$.

Teorema 5.3

Sean $E[X] = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$, la media y la varianza respectivamente, que suponemos finitas, de los tiempos entre llegadas. Entonces $N(t)$ es asintóticamente normal de media t/μ y varianza $\frac{t\sigma^2}{\mu^3}$

Demostración.

Vamos a obtener una expresión para

$$P\left\{\frac{N\ (t)-\frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}<\ y\right\} \tag{5.10}$$

Llamamos $r_t=\frac{t}{\mu}+y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}$, (5.10) es igual a

$$P\ \{N\ (t)<\ r_t\}=\ P\left\{S_{r_t}>\ t\right\}, \tag{5.11}$$

donde la igualdad es cierta por la relación entre las variables S_n y $N(t)$.

$$P\left\{S_{r_t}>\ t\right\}=P\left\{\frac{S_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}>\frac{t-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}\right\} \tag{5.12}$$

Aunque, rigurosamente hablando, para aplicar la igualdad (5.1), r_t debe ser un entero, no sería difícil extender el razonamiento a un caso más general. Sustituyendo el valor de r_t, en la expresión anterior tenemos

$$P\left\{\frac{S_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}>\ \frac{(-y)}{\sqrt{\left(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)}}\right\}$$

Por el teorema central del límite, $\frac{S_{r_t}-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}$ converge a una variable aleatoria normal de media 0 y varianza 1 cuando t tiende a infinito. Además, como

$$\frac{(-y)}{\sqrt{\left(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)}}\rightarrow -y$$

si $t\rightarrow\infty$, tenemos, uniendo todo lo anterior que

$$P\left\{\frac{N\ (t)-\frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}<\ y\right\}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

cuando $t\ \rightarrow\infty$ ■

6. El proceso de renovación retardado

En esta sección y en las siguientes vamos a considerar casos más generales, así como algunas variaciones del proceso de renovación.

6.1 Caso general

Consideramos un proceso de renovación tal que el primer tiempo entre llegadas, T_1, tiene distribución diferente del resto. Es decir, seguimos considerando los tiempos entre llegadas variables aleatorias independientes y tales que $T_2 T_3, \ldots$ tienen todas distribución F, mientras que T_1 se distribuye según G, posiblemente diferente de F.

Este tipo de proceso puede modelizar la siguiente situación: comenzamos a observar un fenómeno en un instante $t > 0$. Si no ocurre una renovación en t, la distribución del tiempo que debemos esperar hasta que observamos la primera renovación no será la misma que la del resto de los tiempos entre llegadas. Como ejemplo consideremos una serie de componentes que se ponen en funcionamiento de la siguiente forma, cada vez que una falla es sustituida inmediatamente por otra nueva idéntica a la anterior. Supongamos entonces que empezamos a observar el proceso t unidades de tiempo después de que la primera componente se pusiese en funcionamiento. En este caso el tiempo hasta que ocurre el fallo de dicha componente, es decir el tiempo hasta la primera renovación, es el tiempo de vida residual en el punto t, Rt, de un proceso de renovación ordinario.

Definición 6.1

Sea $\{T_n;\ n = 1,2, \ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes, tales que T_1 tiene distribución G, y T_n tiene distribución F para todo $n > 1$. Sea $S_0 = 0$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

para $n \geq 1$ y

$N_R(t) = sup\,\{n: S_n \leq t\}$.

El proceso estocástico $\{N_R(t), t \geq 1\}$ se llama *proceso de renovación retardado* o *proceso de renovación general*.

Procediendo de manera análoga al caso ordinario, podemos deducir

$$P\{N_R(t) = n\} = P\{S_n \leq t\} - P\{S_n + 1 \leq t\}$$

$= G*F_n{-}1(t) - G*F_n(t).$ (6.1)

Llamamos $M_R(t) = E[N_R(t)]$, a la función de renovación. Puede comprobarse que

$M_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G * F_{n-1}(t)$, (6.2)

donde $F_0(t) = 1$, para $t \geq 0$, y, tomando transformadas de Laplace,

$$M_R{}^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 - F^*(s)}$$

Basándonos en el caso ordinario, podemos probar resultados límites similares para el proceso retardado, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.2

Sea $\mu = E[T_n]$, $n > 1$,

(i) $\frac{N_R(t)}{t} \xrightarrow{c.s} \frac{1}{\mu}$ si $t \to \infty$

(ii) $\frac{M_R(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu}$ si $t \to \infty$

Recordemos de nuevo el ejemplo de una serie de componentes idénticas que operan de tal forma que cuando una componente falla es sustituida inmediatamente por otra nueva e idéntica, si suponemos que en el momento en que empezamos la observación la componente en funcionamiento no era nueva. La variable T_R es el tiempo que tarda en fallar la primera componente desde que comenzamos a observar el proceso, evidentemente, esta variable aleatoria tiene distinta distribución del resto de los tiempos entre sucesivos reemplazamientos, T_i

Supongamos que el tiempo de vida de las componentes tienen función de distribución F. Podemos considerar dos procesos de renovación asociados a este fenómeno, de manera que tenemos dos funciones de renovación $M(t)$, asociada a la distribución F y $M_R(t)$, asociada al proceso retardado. ¿Cuál es la relación entre estas dos funciones?, ya vimos que $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$, condicionando sobre la primera renovación, se tiene

$$E[N_R(t) \mid T_R = x] = \begin{cases} 0 & , \ x > t \\ 1 + M(t-x), & x \leq t \end{cases}.$$

Por el teorema de la probabilidad total,

$$M_R(t) = \int_0^{\infty} E\big[N_R(t)\big|\, T_R = x\big] dG(x)$$

$$= \int_0^t 1 + M(t-x) dG(x)$$

$$= G(t) + \int_0^t M(t-x) dG(x)$$

$= G(t) + G{*}M(t)$, (6.3)

Según (6.2), $M_R = G + M{*}G$ (desarrollando la expresión (6.2) podríamos haber llegado a esta expresión igualmente), es decir, M_R es la solución de la ecuación de renovación

$M_R = G + F{*}M_R$.

Como consecuencia de todo lo anterior puede comprobarse, ver Karlin & Taylor (1975), que $M_R(t)$, verifica el teorema principal de renovación, por tanto, si F no es aritmética se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} [M_R(t) - M_R(t-h)] = \frac{h}{\mu}$$

6.2 Procesos de renovación de equilibrio

Supongamos un proceso de renovación retardado en el que el primer tiempo de renovación, T_e, tiene función de densidad

$f_e(t) = \gamma\bar{F}(t)$,

donde $\gamma = 1/E[T]$ y $\bar{F}(t)$ es la función de supervivencia del resto de tiempos entre llegadas, T. Esta es la densidad asintótica del tiempo residual, ver ecuación (5.9). Un proceso tal recibe el nombre de *proceso de renovación de equilibrio.* Podemos decir por tanto, que un proceso de equilibrio comienza con una longitud de renovación igual en distribución a la vida residual. Intuitivamente, estos procesos se generan dejando t crecer indefinidamente, de manera que se alcanza la distribución asintótica de la vida residual, en ese momento tomamos $t = 0$, de manera que la vida residual es el tiempo de la primera renovación.

Algunas características de esta variable que usaremos más adelante, son, el momento no centrado de orden k, $k \geq 1$,

$$E[T_e^k] = \gamma \frac{E\big[T^{k-1}\big]}{k+1}$$

y la transformada de Laplace

$$f_e^*(t) = \gamma\frac{1-F(t)}{s} \tag{6.41}$$

Igual que para el proceso retardado general, la única diferencia entre el proceso de equilibrio, $\{N_e(t), t \geq 0\}$ y el proceso ordinario $\{N(t), t \geq 0\}$ es el tiempo de la primera renovación, de modo que ambos procesos deben tener propiedades parecidas, en concreto, Teorema 6.2,

$$\frac{N_R(t)}{t} \xrightarrow{c.s} \gamma \quad t \to \infty.$$

El resultado siguiente proporciona una propiedad que caracteriza este tipo de procesos y que justifica la denominación de procesos de equilibrio.

Teorema 6.3

Consideremos un proceso de renovación de equilibrio, entonces $M_e(t) = \gamma t$, $t \geq 0$.

Demostración.
Vamos a llamar $\hat{F}_n(t) = F_e * F_{n-1}(t)$ donde F_{n-1} es la convolución F consigo misma n–1 veces, $n = 2,3,\ldots$, y $\hat{F}_1(t) = F_e(t)$. Tenemos además que

$$M_e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(t)$$

de modo que usando (6.4)

$$M_e^*(s) = \frac{\gamma(1-\varphi_T(s))}{s^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_T(s)\right)^{n-1} = \frac{\gamma}{s^2}$$

si tomamos inversos, tenemos que

$M_e(t) = \gamma t$, $t \geq 0$. ■

A partir de la expresión anterior, obtenemos que la densidad de renovación de un proceso de equilibrio es $m_e(t) = \gamma$, por lo tanto, se trata de un proceso estacionario, ver Definición 2.10.

7. Procesos de renovación alternados

En esta sección vamos a generalizar los procesos de renovación considerando que los tiempos entre renovaciones verifican $T_n = X_n + Y_n$, $n = 1,2, \ldots$ Es decir, suponemos que la renovación $n\text{–}ésima$ se realiza en dos fases, la duración de la primera fase es una variable aleatoria Xn, y la segunda fase Y_n. Seguimos considerando $\{T_n;\ n \geq 1\}$ independientes e idénticamente distribuidas, y exigimos además que $E[X_n] + E[Y_n]$ sea finita. El interés en este tipo de procesos es determinar la probabilidad de que en un instante determinado, el proceso se encuentre en una fase en particular.

Vamos a llamar $\pi_1(t)$ la probabilidad de que en el tiempo t el proceso se encuentre en la primera fase. Distinguimos dos casos, la primera renovación tiene lugar después de t o bien la primera renovación ocurre antes de t, y condicionando sobre estos sucesos tenemos que la probabilidad de que la primera fase dure más de t unidades de tiempo es

$$\pi_1(t) = \bar{F}_X(t) + \int_0^t m(x)\, \bar{F}_X(t-x)dx \qquad (7.1)$$

donde el primer sumando corresponde al caso en que la primera renovación ocurre después de t y la integral es la probabilidad del siguiente suceso: una renovación ocurre en el intervalo $(x, x+dx)$ y la longitud de la primera fase es mayor que $t\text{–}x$. La ecuación (7.1), puede escribirse también en términos de convoluciones como

$$\pi_1(t) = \bar{F}_X(t) + \int_0^t \bar{F}_X(t-x)dM(t) = \bar{F}_X(t) + M * \bar{F}_X(t)$$

y, según el Teorema 4.2, π_1 es la solución de la siguiente ecuación de renovación

$$\pi_1(t) = \bar{F}_X(t) + F * \pi_1(t)$$

Podemos aplicar ahora el teorema básico de renovación, con lo que si F no es aritmética se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \pi_1(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \bar{F}_X(t)dt = \frac{E[X]}{E[T]} = \frac{E[X]}{E[X]+E[Y]} \qquad (7.2)$$

El límite calculado en la ecuación (7.2) indica la probabilidad de encontrar el proceso en la primera fase después de un largo periodo de tiempo.

Ejemplo 7.1

Sean X_n e Y_n variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros λ y μ, respectivamente. Un proceso tal se llama proceso de Poisson alternado.

Vamos a calcular en primer lugar la densidad de renovación $m(t)$. Es fácil ver que la transformada de Laplace de la función de densidad de la variable T viene dada, ya que se trata de la densidad de la suma de dos exponenciales independientes, por la siguiente expresión

$$\varphi_T(s) = \frac{2\mu}{(\lambda + s)(\mu + s)}$$

Usando la expresión (2.7), se tiene

$$M^*(s) = \frac{\lambda\mu}{s^2(\lambda + \mu + s)}$$

Usando las propiedades de la transformada de Laplace e invirtiendo, $M(t)$ viene dada por la siguiente expresión

$$M(t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)} t - \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

y por tanto

$$M(t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

Sustituyendo en la ecuación (7.2) y simplificando, la probabilidad de que en el tiempo t el proceso se encuentre en la fase primera es

$$\pi_1(t) = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

Tomando límite, para t→∞, o bien, sustituyendo directamente en la ecuación

$$\lim_{t\to\infty} \pi_1(t) = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)} = \frac{1/\lambda}{(1/\lambda + 1/\mu)}$$

lo que significa que la probabilidad límite de encontrarse en la primera fase de un proceso de Poisson alternado es igual al proporción del tiempo esperado entre dos renovaciones que el proceso pasa en la primera fase.

Podemos estar interesados en determinar el tiempo total que el proceso pasa en cada una de las fases, en un intervalo de tiempo $[0, t]$. Sea $P_1(t)$ la fracción del tiempo total que el proceso está en la fase primera, hasta t,

$$L_1(t) = X_1 + X_2 + \ldots. + X_{N(t)} + \tau_1(t), \tag{7.3}$$

donde $\tau_1(t)$ es el tiempo total pasado en la primera fase durante el intervalo $(S_{N(t)}, t)$, es decir

$\tau_1(t) = \ min\{X_{N(t)+1}, t - S_{N(t)}\}$.

Con respecto a la segunda fase de la reparación, $\tau_2(t) = \ t–S_{N(t)} - \tau_1(t)$ es el tiempo total que el proceso pasa en la segunda fase en el intervalo de tiempo $(S_{N(t)}, t)$, de manera análoga a la expresión (7.3), se tiene

$L_2(t) \ = Y_1 + \ Y_2 + \ldots . + Y_{N(t)} \ + \ \tau_2(t)$,

y, por supuesto $t = L_1(t) \ + L_2(t)$. La cantidad promedio de tiempo que el proceso pasa en la fase 1 se obtiene

$$P_1(t) = \frac{L_1(t)}{L_1(t) + L_2(t)}$$

Puede comprobarse, por la ley fuerte de los grandes números, que

$\frac{L_1(t)}{N(t)} \to E[X]$ y $\frac{L_2(t)}{N(t)} \to E[Y]$

cuando $t \to \infty$, de modo que

$$P_1(t) \xrightarrow{c.s} \frac{E[X]}{E[X] + E[Y]}$$

cuando $t \to \infty$, es decir, el promedio límite del tiempo que el proceso pasa en la fase 1 es igual a la probabilidad de encontrar el proceso de renovación en la primera fase en un instante de tiempo seleccionado aleatoriamente, $\lim_{t\to\infty} \pi_1(t)$

8. Teoría de renovación aplicada a cadenas de Markov

Podemos obtener muchos resultados teniendo en cuenta que la propiedad de Markov implica que cada vez que se produce un retorno a un estado dado i, la cadena se comporta como si se iniciara de nuevo, de manera que tenemos i–*ciclos* que forman un proceso de renovación.

Supongamos que la cadena se inicia en el estado i, vamos a llamar $N_{i,j}(n)$ a la variable número de visitas al estado j que se producen en las n primeras etapas, dado que $X_0 = i$. Si i es un estado recurrente, $N_{i,j}(n)$es un proceso de renovación. Si j es un estado recurrente y $i \leftrightarrow j$, $N_{i,j}(n)$ es un proceso de renovación retardado. Además la teoría de renovación nos ayudará a discutir diferentes interpretaciones de la distribución estacionaria, lo cual es muy importante desde el punto de vista práctico.

Supongamos que j es un estado recurrente, sea T_j tiempo entre dos retornos consecutivos al estado j, y sea $\mu_j = E[T_j]$, según el Teorema 3.1 (ii),

$$\frac{N_{i,j}(n)}{n} \xrightarrow{c.s} \frac{1}{\mu_j}$$

cuando $n \to \infty$.

Como $\pi_1(t) = 1/\mu_j$, la expresión anterior muestra que $\pi_j$es la proporción de tiempo que la cadena pasa en el estado j para casi todas las trayectorias muestrales de la cadena.

Además, si llamamos $M_{i,j}(n) = E[N_{i,j}(n)]$, tenemos, por el teorema elemental de renovación, que

$$\frac{M_{i,j}(n)}{n} \xrightarrow{c.s} \pi_1(t)$$

cuando $n \to \infty$, es decir, entre todas las trayectorias muestrales de la cadena, la proporción esperada del número de etapas que la cadena pasa en el estado j es π_j.

El proceso que estamos considerando es un proceso de renovación discreto, en este caso, podemos definir la densidad de renovación $m_{i,j}(n) = M_{i,j}(n) – M_{i,j}(n-1)$, y, por el Teorema 3.1 (iv), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} m_{i,j}(n) = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{n} = \pi_j$$

lo que significa que la probabilidad de encontrar la cadena en el estado j en una etapa elegida al azar, es decir en el límite, es igual a π_j. Esta ecuación demuestra también que esta probabilidad es independiente del estado de partida.

Si la distribución inicial de la cadena satisface la ecuación estacionaria, las probabilidades de ocupación de estados de la cadena son todas iguales a la distribución inicial, esto significa que la cadena es estacionaria, en el sentido de que

$$P\{X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k\}$$

$$= P\{X_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, X_{m+k} = x_{m+k}\}, \tag{8.1}$$

para todo m.

Si una cadena de Markov posee distribución estacionaria, se comporta, en el límite, como indica la expresión (8.1), esto nos recuerda los procesos de renovación de equilibrio que tratamos en la sección 6.2. Recordemos que el proceso de renovación de equilibrio se obtiene como una forma límite de un proceso de renovación, y que si el proceso de renovación se inicia con una etapa de renovación "especial", se trata de un proceso de renovación de equilibrio.

REFERENCIAS

- Barlow, R. E. y Proschan, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Gámiz Pérez, M. L. (2000). Introducción a los procesos estocásticos. Cadenas de Markov y procesos de renovación. Universidad de Granada.
- Gerstbakh, I.B. (2000). Reliability Theory: With Applications to Preventive Maintenance. Springer
- Medhi, J. (1994). Stochastic Processes. New Age International.
- Nakagawa T. (2011) Stochastic Processes: with Applications to Reliability Theory. Spriger Verlag. London.
- Pérez Ocón, R. (2000). Procesos de Markov. Introducción a los procesos estocásticos. Universidad de Granada.
- Pérez Ocón, R., Gámiz Pérez, M.L. y Ruiz Castro, J.E. (1998). Métodos estocásticos en Teoría de la Fiabilidad. Proyecto Sur de Ediciones, S.L.
- Ross, S. (2010) Introduction to Probability Models. 10ma edición. Academy press
- Sarabia, A. (1996) Investigación Operativa. Universidad pontificia de Comillas. Madrid.
- Sols A. (2000) Fiabilidad, Mantenibilidad, Efectividad: Un Enfoque Sistemático. Universidad Pontificia de Comillas. Madrid