

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



Trabajo de final de máster en Estadística Aplicada

ESTUDIO DEL PROCESO DE DIFUSIÓN MIXTO  
LOGNORMAL-GOMPERTZ

REALIZADO POR

Elsa Hernández Rodríguez

DIRIGIDO POR

Desirée Romero Molina

Septiembre, 2012

# Índice

<b>1. Curva determinística</b>	<b>2</b>
<b>2. Obtención del modelo</b>	<b>5</b>
<b>3. Obtención del proceso a partir de modelos de crecimiento</b>	<b>7</b>
<b>4. Obtención del proceso como límite de esquemas discretos</b>	<b>9</b>
<b>5. Estudio del nuevo proceso</b>	<b>10</b>
5.1. Obtención de la función de densidad de transición . . . . .	10
5.2. Distribuciones finito-dimensionales . . . . .	12
5.2.1. Distribución inicial degenerada . . . . .	12
5.2.2. Distribución inicial lognormal . . . . .	14
5.3. Momentos . . . . .	16
5.4. Otras funciones paramétricas de interés: moda y cuantiles . . . . .	18

## 1. Curva determinística

La curva que se va a estudiar es el resultado de combinar una curva Gompertz y una exponencial. La expresión genérica de esta curva es

$$f(t) = x_0 \exp\left[\left(\frac{-m}{b}\right)(e^{-bt} - e^{-bt_0})\right] e^{c(t-t_0)}, t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

con  $m > b > 0$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

Se restringe su estudio en el tiempo a valores superiores a un instante inicial  $t \geq t_0 \geq 0$  y llamando  $x_0 = f(t_0) > 0$ .

Realizamos el estudio de esta curva, para lo que distinguimos tres casos dependiente del valor que toma  $c$ .

- Si  $c > 0$  entonces la curva es siempre creciente, no presenta ni mínimos ni máximos. Con respecto a los puntos de inflexión debemos estudiar tres casos por separado
  - Cuando  $c > \frac{b}{4}$  la curva no tiene punto de inflexión (ver figura 1)

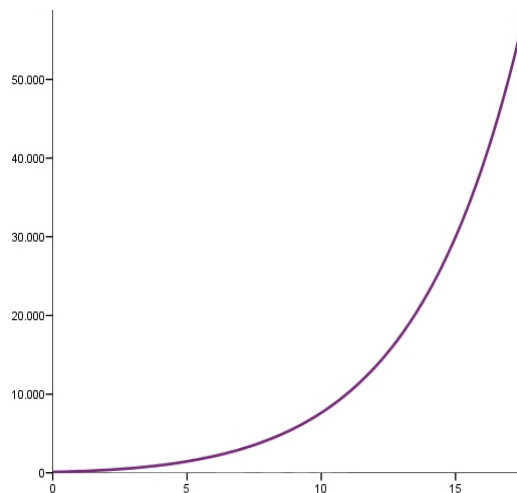


Figura 1: Curva de crecimiento con  $t_0 = 0, m = 0.5, b = 0.25, c = 0.25, x_0 = 100$

- Cuando  $c = \frac{b}{4}$  sólo presenta un punto de inflexión, siempre y cuando se verifique que

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{b}{4m}\right)}{-b} > t_0$$

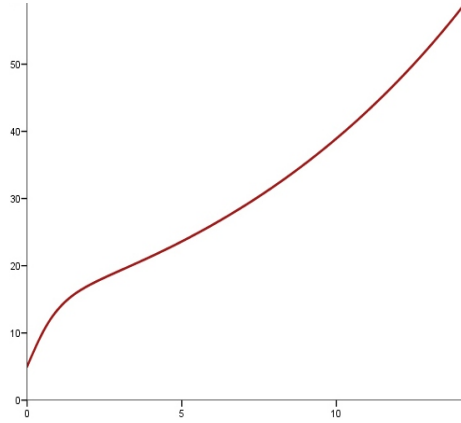


Figura 2: Curva de crecimiento con  $t_0 = 0, m = 2, b = 1.9, c = 0.1, x_0 = 5$

y en cuyo caso el punto es

$$\left( \frac{\ln\left(\frac{b}{4m}\right)}{-b}, x_0 \left(\frac{4m}{b}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\left[\frac{m}{b} e^{-bt_0} - \frac{1}{4}(1+t_0)\right]} \right)$$

- Cuando  $c < \frac{b}{4}$  la curva puede llegar a tener dos puntos de inflexión dados por

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{b-2c+\sqrt{b^2-4bc}}{2m}\right)}{-b}, \quad t_2 = \frac{\ln\left(\frac{b-2c-\sqrt{b^2-4bc}}{2m}\right)}{-b} \quad (t_1 < t_2)$$

En el caso  $t_0 \leq t_1$  la curva posee dos puntos de inflexión (ver figura 3), si  $t_1 < t_0 \leq t_2$  posee sólo uno y en el caso  $t_2 < t_0$  no tiene ninguno.

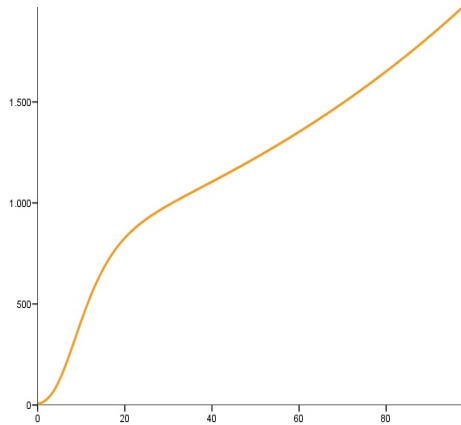


Figura 3: Curva de crecimiento con  $t_0 = 0, m = 1, b = 0.2, c = 0.01, x_0 = 5$

- Si  $c = 0$  la curva coincide con la curva Gompertz, la cual es monótona creciente, acotada por  $x_0 e^{\frac{m}{b}} e^{-bt_0}$  y presenta un punto de inflexión (ver figura 4)

$$\left( \frac{\ln\left(\frac{b}{m}\right)}{-b}, x_0 e^{\frac{m}{b}} e^{-bt_0} - 1 \right)$$

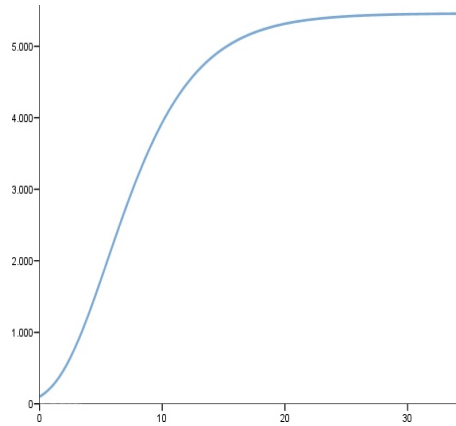


Figura 4: Curva de crecimiento con  $t_0 = 0$ ,  $m = 1$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 0$ ,  $x_0 = 100$

- Si  $c < 0$  se verifica que  $c < \frac{b}{4}$ , ya que  $b > 0$ . Por lo tanto, al igual que vimos anteriormente, la curva podría tener hasta dos puntos de inflexión (ver figura 5), pero tiende asintóticamente a cero.

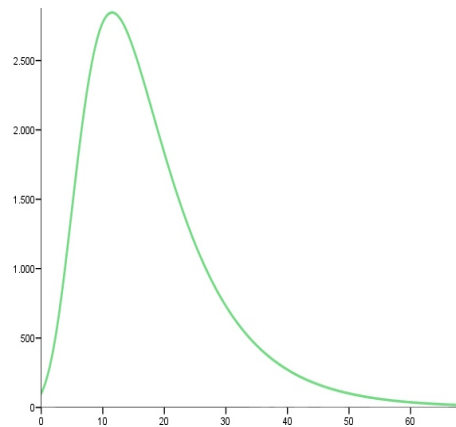


Figura 5: Curva de crecimiento con  $t_0 = 0$ ,  $m = 1$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = -0.1$ ,  $x_0 = 100$

## 2. Obtención del modelo

Siguiendo la metodología desarrollada por Capocelli y Ricciardi, vamos a modificar la media infinitesimal de la ecuación de Fokker-Planck del proceso lognormal, de forma que la solución de la ecuación resultante, en ausencia de ruido y con condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0), \quad (2)$$

sea la curva (1).

Notemos que la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(me^{-bt} + c)xf],$$

con condición inicial (2), tiene por solución

$$f(x, t | x_0, t_0) = \delta \left( x - x_0 \exp \left( \frac{-m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + c(t - t_0) \right) \right),$$

lo cual implica que la población cuyo comportamiento se está modelizando crece de acuerdo con la curva de crecimiento (1).

Así, partiendo de la ecuación de Fokker-Planck del proceso lognormal

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [mxf] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f],$$

y modificando su media infinitesimal, por  $me^{-bt} + c$ , se obtiene la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(me^{-bt} + c)xf] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f], \quad 0 < x < \infty \quad m > b > 0 \quad c \in \mathbb{R} \quad (3)$$

de un nuevo proceso, que verifica la condición deseada de que su solución, en ausencia de ruido y condición inicial (2) sea la curva (1).

El procedimiento anterior equivale a considerar una determinada función de regulación en la ecuación de Langevin o a la aleatorización de algún parámetro en la ecuación diferencial determinística de crecimiento correspondiente. A continuación, vamos a estudiar ambos planteamientos para el caso que nos ocupa.

Por una parte podemos considerar la función de regulación

$$\varphi(x, t) = 1 - e^{-bt} - \frac{c}{m} - \frac{1}{m} \Lambda(t)$$

en la ecuación de Langevin

$$\frac{dx(t)}{dt} = mx(t)[1 - \varphi(x(t), t)],$$

con  $\Lambda(t)$  un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero y densidad espectral  $\sigma^2$ .

Esto equivale a considerar la ecuación determinística de crecimiento

$$\frac{dx(t)}{dt} = (me^{-bt} + c)x(t)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

e, interpretándola como una generalización de la ecuación de crecimiento malthusiano con razón de crecimiento dependiente del tiempo,  $r(t) = me^{-bt} + c$ , reemplazar ésta por la suma de tal función y un ruido  $\Lambda(t)$ , esto es,

$$r(t) \longrightarrow r(t) + \Lambda(t).$$

La ecuación resultante en ambos casos

$$\frac{dx(t)}{dt} = (me^{-bt} + c)x(t) + x(t)\Lambda(t)$$

se puede escribir en forma de ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = (me^{-bt} + c)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad (4)$$

donde  $W(t)$  representa el proceso de Wiener estándar.

La solución de esta ecuación, considerando la integral estocástica de Itô, es un proceso de difusión  $\{X(t); t \geq t_0\}$  no homogéneo en el tiempo, con valores en  $\mathbb{R}^+$ , momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= (me^{-bt} + c)x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned} \quad (5)$$

por lo que dicho proceso coincide con el que se ha obtenido anteriormente.

Por lo tanto, queda definido un nuevo proceso de difusión asociado a la curva (1) como aquel proceso de difusión  $\{X(t); t \geq t_0\}$  con valores en  $\mathbb{R}^+$  y momentos infinitesimales definidos anteriormente, donde  $m > b > 0, \sigma > 0$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

### 3. Obtención del proceso a partir de modelos de crecimiento

Nos planteamos, a continuación, la obtención del proceso como límite de modelos discretos estocásticos de crecimiento con fecundidad diferencial por unidad de tiempo dependiente del tiempo.

Este procedimiento extiende al considerado por Ricciardi (1977) para obtener los procesos lognormal y logístico a partir de modelos con fecundidad diferencial por unidad de tiempo constante (caso lognormal) o una función lineal del tamaño de la población (caso logístico), pero en ambos casos independientes del tiempo, ya que los procesos por él considerados son homogéneos en el tiempo, a diferencia del proceso que ahora se ha introducido.

Consideremos un modelo de crecimiento de poblaciones del tipo

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} &= W_{n\tau} X_{n\tau}, & n = 0, 1, \dots \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

en el que  $X_{n\tau}$  representa el tamaño de la población en la  $n$ -ésima generación,  $\tau$  el intervalo de tiempo entre sucesivas generaciones, valor que se hará tender a cero posteriormente, y  $W_{n\tau}$  la fecundidad en el instante de tiempo  $n\tau$ , que se modelizará, para  $n = 1, 2, \dots$ , mediante una sucesión de variables aleatorias independientes y no idénticamente distribuidas (dado que el proceso límite resultante es no homogéneo) de forma que la fecundidad diferencial por unidad de tiempo es de la forma

$$\frac{1}{\tau} \frac{X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}}{X_{n\tau}} = m e^{-bn\tau} + c$$

Dicho modelo se puede escribir como

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} &= (m\tau e^{-bn\tau} + c\tau) X_{n\tau} & (n = 0, 1, \dots) \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{6}$$

y probamos a continuación que aleatorizándolo, se obtiene, en el límite, el proceso de difusión con momentos infinitesimales (5). La introducción de ambiente aleatorio puede lograrse de múltiples maneras: haciendo  $m$ ,  $b$  o ambos aleatorios y, a su vez, existen varias alternativas para lograr este fin. Todas las alternativas siguen una idea común que es considerar variables aleatorias independientes y no idénticamente distribuidas  $\{Z_{n\tau}\}$  que verifiquen

$$E[Z_{n\tau}] = (\text{función que se aleatoriza}) \times \tau$$



y sustituir, en el modelo (6), dicha expresión por las variables  $Z_{n\tau}$ .

Vamos a considerar el caso en que  $m$  y  $b$  son aleatorios.

Para introducir ambiente aleatorio en el modelo definimos la siguiente sucesión de variables aleatorias e independientes  $Z_{n\tau}$ , no idénticamente distribuidas, tales que

$$P[Z_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] = \frac{1}{2} + \frac{(me^{-bn\tau} + c)\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

$$P[Z_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] = \frac{1}{2} - \frac{(me^{-bn\tau} + c)\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

cuyos momentos no centrados son

$$E[Z_{n\tau}] = (me^{-bn\tau} + c)\tau$$

$$E[Z_{n\tau}^2] = \sigma^2\tau$$

$$E[Z_{n\tau}^{2+p}] = o(\tau), \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, el Modelo con ambiente aleatorio queda definido de la siguiente manera

$$\begin{cases} X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = Z_{n\tau}X_{n\tau} & n = 0, 1, \dots \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (7)$$

Calculamos ahora sus momentos infinitesimales

- $\frac{1}{\tau}E[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}|X_{n\tau} = x] = \frac{1}{\tau}E[Z_{n\tau}]x = \frac{1}{\tau}(me^{-bn\tau} + c)\tau x = (me^{-bn\tau} + c)x$
- $\frac{1}{\tau}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2|X_{n\tau} = x] = \frac{1}{\tau}E[Z_{n\tau}^2]x^2 = \frac{1}{\tau}\sigma^2\tau x^2 = \sigma^2 x^2$
- $\frac{1}{\tau}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^{2+p}|X_{n\tau} = x] = \frac{1}{\tau}E[Z_{n\tau}^{2+p}]x^{2+p} = \frac{o(\tau)x^{2+p}}{\tau}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$

Cuando se hace tender el valor de  $\tau$  a cero y el valor de  $n$  a  $\infty$ , bajo la condición  $n\tau = t$  constante, se tiene que  $X_{n\tau}$  converge a un proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = (me^{-bt} + c)x$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2,$$

## 4. Obtención del proceso como límite de esquemas discretos

Recordamos que el proceso de difusión que estamos estudiando viene determinado por los momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = (me^{-bt} + c)x$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2,$$

Para obtener este proceso se parte del esquema discreto

$$\begin{cases} X_{(n+1)\tau} = X_{n\tau} + Z_{(n+1)\tau} & n = 0, 1, \dots \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

donde  $Z_{(n+1)\tau}$  son variables aleatorias independientes que tienen que verificar

$$P(Z_{(n+1)\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta) = \theta(k\delta, n\tau)$$

$$P(Z_{(n+1)\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta) = \phi(k\delta, n\tau)$$

$$P(Z_{(n+1)\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta) = 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau)$$

En general, sabemos que, para obtener el proceso basta tomar las funciones  $\phi$  y  $\theta$  adecuadas, teniendo en cuenta la siguiente relación

$$\theta(x, t) = \frac{A_2(x, t)}{2\delta^2} \tau + \frac{A_1(x, t)}{2\delta} \tau$$

$$\phi(x, t) = \frac{A_2(x, t)}{2\delta^2} \tau - \frac{A_1(x, t)}{2\delta} \tau$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\theta(x, t) = \frac{\sigma^2 x^2}{2\delta^2} \tau + \frac{(me^{-bt} + c)x}{2\delta} \tau$$

$$\phi(x, t) = \frac{\sigma^2 x^2}{2\delta^2} \tau - \frac{(me^{-bt} + c)x}{2\delta} \tau$$

Por lo tanto, las  $Z_{(n+1)\tau}$  tienen que cumplir que

$$P(Z_{(n+1)\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta) = \frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau + \frac{(me^{-bn\tau} + c)k}{2} \tau$$

$$P(Z_{(n+1)\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta) = \frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau - \frac{(me^{-bn\tau} + c)k}{2} \tau$$

$$P(Z_{(n+1)\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta) = 1 - \sigma^2 k^2 \tau$$

Se debe verificar que

$$|me^{-bt} + c| \leq j\sigma^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

para que las funciones  $\theta(x, t)$  y  $\phi(x, t)$  están bien definidas y

$$\sigma^2 j^2 < \frac{1}{\tau}$$

para asegurar que  $\theta(x, t) + \phi(x, t) < 1$ .

## 5. Estudio del nuevo proceso

Una vez propuesto el nuevo proceso de difusión asociado a la curva, el siguiente paso que vamos a dar es el estudio de sus características principales.

### 5.1. Obtención de la función de densidad de transición

Para la obtención de la densidad de transición del proceso vamos a considerar la ecuación atrasada o de Kolmogorov

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial y} + \frac{1}{2} A_2(y, s) \frac{\partial^2 f(x, t|y, s)}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son los momentos infinitesimales especificados en (5), y vamos a utilizar un resultado debido a Ricciardi, donde se especifica bajo qué condiciones existe una transformación del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \psi(x, t), & y' &= \psi(y, s), \\ t' &= \phi(t), & s' &= \phi(s) \end{aligned}$$

que transforme la ecuación (8) en

$$\frac{\partial f'(x', t'|y', s')}{\partial s'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f'(x', t'|y', s')}{\partial y'^2} = 0,$$

que se corresponde con la ecuación adelantada o de Kolmogorov del proceso Wiener estándar, cuya función de densidad de transición es conocida:

$$f'(x', t'|y', s') = \left( \sqrt{2\pi(t' - s')} \right)^{-1} \exp \left( -\frac{(x' - y')^2}{2(t' - s')} \right).$$

El resultado al que nos referimos es el siguiente.

Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función densidad de transición  $f(x, t|y, s)$  y momentos infinitesimales  $A_1(x, t)$  y  $A_2(x, t)$  pueda transformarse al proceso Wiener estándar

es que existan funciones arbitrarias  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  que verifiquen

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x, t)]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial t}}{(A_2(y, t))^{3/2}} dy \right\}. \quad (9)$$

En tal caso la transformación es

$$\begin{aligned} x' = \psi(x, t) &= (k_1)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds\right) \int_z^x \frac{1}{(A_2(y, t))^{1/2}} dy \\ &\quad - \frac{(k_1)^{1/2}}{2} \int_{t_2}^t C_1(s) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta\right) ds + k_2 \\ t' = \phi(t) &= k_1 \int_{t_1}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta\right) ds + k_3 \end{aligned}$$

siendo  $z$  un valor del intervalo de definición del proceso,  $t_i \in [0, \infty)$  y  $k_i$  constantes arbitrarias con la restricción  $k_1 > 0$ .

Puesto que, para cada  $t$ ,  $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \left[ \frac{\phi'(t)}{A_2(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$ , la transformación  $x' = \psi(x, t)$  es biyectiva y la relación entre las densidades de transición del proceso Wiener y el transformado será

$$f(x, t|y, s) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} f'(x', t'|y', s'). \quad (10)$$

Aplicando dicho resultado en nuestro caso, la condición (9) queda

$$(me^{-bt} + c)x = \left( \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{2} C_1(t) \right) x + \frac{x \ln x}{2} C_2(t)$$

que se verifica para, por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{2}{\sigma} (me^{-bt} + c) - \sigma \\ C_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la transformación que lleva al proceso  $\{X(t); t \geq t_0\}$  en el proceso Wiener viene dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{(k_1)^{1/2}}{\sigma} \left( \ln \frac{x}{z} + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_2}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_2) \right) + k_2 \\ \phi(t) &= k_1(t - t_1) + k_3. \end{aligned}$$

Con ello, y utilizando la relación (10), se obtiene que la función de densidad de transición del proceso considerado es

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[\ln x - \ln y + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)]^2}{(t-s)\sigma^2}\right)$$

es decir, para  $t > s$

$$X(t)|X(s) = y \sim \Lambda_1 \left( \ln y - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-s), \sigma^2(t-s) \right). \quad (11)$$

Una vez obtenida la función de densidad de transición del proceso se puede deducir de forma directa la función de distribución de transición:

$$\begin{aligned} F(x, t|y, s) &= \int_0^x \frac{1}{u\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \times \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\left[ \ln u - \ln y + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) \right]^2}{\sigma^2(t-s)} \right) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - \ln y + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)}{\sqrt{2\sigma^2(t-s)}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf} \left[ \frac{\ln x - \ln y + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)}{\sqrt{2\sigma^2(t-s)}} \right], \end{aligned}$$

donde  $\operatorname{Erf}(x)$  es la función error  $\operatorname{Erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

## 5.2. Distribuciones finito-dimensionales

Puesto que el proceso que estamos considerando es markoviano, el cálculo de las distribuciones finito-dimensionales depende sólo de la distribución inicial y de las transiciones. Puesto que estas últimas son conocidas, habrá que imponer cuál es la distribución inicial. En nuestro caso nos centraremos en el caso degenerado, o sea,  $P[X(t_0) = x_0] = 1$  y en el caso lognormal,  $X(t_0) \sim \Lambda(\mu_0, \sigma_0^2)$ .

### 5.2.1. Distribución inicial degenerada

En el caso en que la distribución inicial es degenerada, es decir  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , la distribución unidimensional de  $X(t)$  coincide con la distribución de  $X(t)|X(t_0) = x_0$ , por tanto a partir de (11) obtenemos

$$X(t) \sim \Lambda_1 \left( \ln x_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0), \sigma^2(t-t_0) \right).$$

Calculemos, a continuación, las distribuciones bidimensionales haciendo notar que mediante el uso de la propiedad de Markov se obtendrían de forma análoga las distribuciones de cualquier dimensión.

Puesto que  $f_{X(t),X(s)}(x,y) = f_{X(s)}(y)f_{X(t)|X(s)=y}(x|y)$  y dado que

$$X(s) \sim \Lambda_1 \left( \ln x_0 - \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0), \sigma^2(s - t_0) \right).$$

$$X(t)|X(s) = y \sim \Lambda_1 \left( \ln y - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - s), \sigma^2(t - s) \right), \quad t > s$$

se obtiene

$$\begin{aligned} f_{X(t),X(s)}(x,y) &= \frac{1}{2xy\pi\sigma^2\sqrt{(s-t_0)(t-s)}} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{(t-t_0)}{2(t-s)} \left\{ \frac{[\ln x - \ln x_0 + \frac{m}{b}(e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0)]^2}{\sigma^2(t-t_0)} + \right. \right. \\ &+ \frac{[\ln y - \ln x_0 + \frac{m}{b}(e^{-bs} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(s-t_0)]^2}{\sigma^2(s-t_0)} \\ &- 2\frac{\sqrt{s-t_0}}{\sqrt{t-t_0}} \frac{[\ln x - \ln x_0 + \frac{m}{b}(e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0)]}{\sigma\sqrt{t-t_0}} \\ &\left. \left. \times \frac{[\ln y - \ln x_0 + \frac{m}{b}(e^{-bs} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(s-t_0)]}{\sigma\sqrt{s-t_0}} \right\} \right), \end{aligned}$$

es decir, la distribución bidimensional para el caso de una distribución inicial degenerada viene dada por

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \sigma^2\Sigma), \quad t > s \geq t_0$$

donde

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{pmatrix} \ln x_0 - \frac{m}{b}(e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \ln x_0 - \frac{m}{b}(e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} t - t_0 & s - t_0 \\ s - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De forma análoga se puede ver que para  $t_0 \leq t < s$ , la distribución bidimensional es

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \sigma^2\Sigma)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{pmatrix} \ln x_0 - \frac{m}{b}(e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \ln x_0 - \frac{m}{b}(e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} t - t_0 & t - t_0 \\ t - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En resumen, la distribución bidimensional del nuevo proceso para el caso en que la distribución inicial sea degenerada resulta ser

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \sigma^2 \Sigma), \quad \forall t, s \geq t_0$$

donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \ln x_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \ln x_0 - \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t - t_0 & t \wedge s - t_0 \\ t \wedge s - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix},$$

siendo  $t \wedge s = \min(t, s)$ .

### 5.2.2. Distribución inicial lognormal

Consideremos ahora que  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ . Siguiendo un razonamiento análogo al anterior se tiene

$$f_{X(t), X(t_0)}(x, x_0) = \frac{1}{2xx_0\pi\sqrt{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2}} \times$$

$$\times \exp \left( -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[ \ln x - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \right]^2 \sigma_0^2}{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2} + \right.$$

$$+ \frac{(\ln x_0 - \mu_0)^2 ((t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2)}{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2} - \right.$$

$$\left. \left. - 2 \frac{\left[ \ln x - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \right] (\ln x_0 - \mu_0) \sigma_0^2}{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2} \right\} \right),$$

es decir,  $(X(t), X(t_0)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma)$ , donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \mu_0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (t - t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta distribución obtenemos la distribución marginal unidimensional de  $X(t)$  integrando en  $x_0$ :

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi(\sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2)}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\left[ \ln x - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \right]^2}{\sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2} \right),$$

es decir,

$$X(t) \sim \Lambda_1 \left[ \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0); \sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2 \right].$$

Calculamos, a continuación, las distribuciones bidimensionales. En este caso, para  $t > s$  y dado que

$$\begin{aligned} X(s) &\sim \Lambda_1 \left[ \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0); \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2 \right] \\ X(t)|X(s) = y &\sim \Lambda_1 \left[ \ln y - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bs}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - s); \sigma^2(t - s) \right], \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} f_{X(t), X(s)}(x, y) &= \frac{1}{2xy\pi\sqrt{\sigma^2(t-s)[\sigma^2(s-t_0) + \sigma_0^2]}} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[ \ln x - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \right]^2 [\sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2]}{\sigma^2(t - s)[\sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2]} + \right. \right. \\ &+ \frac{\left[ \ln y - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \right]^2 [\sigma^2(t - s) + \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2]}{\sigma^2(t - s)[\sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2]} - \\ &- 2 \left[ \ln x - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \right] \times \\ &\left. \left. \times \frac{\left[ \ln y - \mu_0 + \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) - (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \right] [\sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2]}{\sigma^2(t - s)[\sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2]} \right\} \right), \end{aligned}$$

es decir, para  $t > s \geq t_0$ , y considerando  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ , se verifica

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma),$$

donde

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2 & \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2 \\ \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2 & \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De forma análoga, en el caso  $t_0 \leq t < s$ , la distribución bidimensional que se obtiene es  $(X(t), X(s)) \sim$



$\Lambda_2(\mu, \Sigma)$ , con

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2 & \sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2 \\ \sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2 & \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

En resumen, la distribución bidimensional del nuevo proceso con una distribución inicial  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$  es

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma), \quad \forall t, s \geq t_0$$

siendo

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bt} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \\ \mu_0 - \frac{m}{b} (e^{-bs} - e^{-bt_0}) + (c - \frac{\sigma^2}{2})(s - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2 & \sigma^2(t \wedge s - t_0) + \sigma_0^2 \\ \sigma^2(t \wedge s - t_0) + \sigma_0^2 & \sigma^2(s - t_0) + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que mediante el uso de la propiedad de Markov se obtendrían de forma análoga las distribuciones de cualquier dimensión, siendo en cualquier caso distribuciones lognormales.

### 5.3. Momentos

Una vez conocidas las distribuciones finito-dimensionales del nuevo proceso  $X(t)$ , para los dos casos de distribuciones iniciales consideradas, pasamos a obtener los momentos  $n$ -dimensionales. El cálculo de los mismos se basa en la conocida forma de los momentos de una ley lognormal (unidimensional y multidimensional), que es la asociada a las distribuciones finito-dimensionales, como se ha comprobado en el punto anterior. En particular, los momentos no centrados, unidimensionales, de orden  $n$  vienen determinados por la siguiente expresión, independientemente de la distribución inicial

$$E[X^n(t)] = E[X^n(t_0)] \exp\left(-\frac{nm}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + n(c + (n-1)\frac{\sigma^2}{2})(t - t_0)\right), \quad (12)$$

de donde la función media resulta

$$m(t) = E[X(t)] = E[X(t_0)] \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + c(t - t_0)\right), \quad \forall t \geq t_0$$

A partir de (12) se obtiene la siguiente expresión genérica para la función varianza del proceso,

$$Var[X(t)] = (E[X(t)])^2[\exp(\xi) - 1]$$

donde  $\xi$  es el segundo parámetro de la distribución lognormal correspondiente a  $X(t)$  en cada uno de los dos casos considerados. De esta forma,

- si la distribución inicial es degenerada,  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ ,

$$Var[X(t)] = x_0^2 \exp\left(-\frac{2m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + 2c(t - t_0)\right) [\exp(\sigma^2(t - t_0)) - 1],$$

- si la distribución inicial es una ley lognormal  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ ,

$$Var[X(t)] = \exp(2\mu_0 + \sigma_0^2) \exp\left(-\frac{2m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + 2c(t - t_0)\right) [\exp(\sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2) - 1]$$

Por otra parte, puesto que la distribución bidimensional del proceso  $(X(t), X(s))$  es lognormal, se pueden obtener los momentos cruzados de cualquier orden. A partir de ellos se tiene la siguiente expresión general para la función covarianza del proceso:

$$\begin{aligned} R(t, s) &= Cov[X(t), X(s)] = \\ &= (E[X(t_0)])^2 \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} + e^{-bs} - 2e^{-bt_0}] + c(t + s - 2t_0)\right) [\exp(\sigma_{12}) - 1] \end{aligned}$$

donde  $\sigma_{12}$  es el elemento que ocupa la posición (1,2) de la matriz paramétrica  $\Sigma$  de la distribución lognormal correspondiente a  $(X(t), X(s))$  en cada caso considerado. Así pues,

- si la distribución inicial es degenerada,  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ ,

$$R(t, s) = x_0^2 \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} + e^{-bs} - 2e^{-bt_0}] + c(t + s - 2t_0)\right) [\exp(\sigma^2(t \wedge s - t_0)) - 1]$$

- si la distribución inicial es una ley lognormal  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ ,

$$R(t, s) = \exp(2\mu_0 + \sigma_0^2) \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} + e^{-bs} - 2e^{-bt_0}] + c(t + s - 2t_0)\right) [\exp(\sigma^2(t \wedge s - t_0) + \sigma_0^2) - 1]$$

De igual manera se pueden obtener los momentos condicionados sin más que considerar (11). Así

$$E[X^n(t)|X(s)] = E[X^n(s)] \exp\left(-\frac{nm}{b} [e^{-bt} - e^{-bs}] + n(c + (n-1)\frac{\sigma^2}{2})(t-s)\right),$$

de donde

$$m(t|s) = E[X(t)|X(s)] = E[X(s)] \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bs}] + c(t-s)\right).$$

## 5.4. Otras funciones paramétricas de interés: moda y cuantiles

Además de las funciones obtenidas en el apartado anterior, existen otras funciones paramétricas de interés como la moda y los cuantiles.

Para el caso de la función moda del nuevo proceso la expresión genérica que se obtiene es

$$M_o(t) = Moda[X(t)] = Moda[X(t_0)] \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + (c - \frac{3\sigma^2}{2})(t - t_0)\right)$$

Así,

- si la distribución inicial es degenerada,  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ ,

$$M_o(t) = x_0 \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + (c - \frac{3\sigma^2}{2})(t - t_0)\right)$$

- si la distribución inicial es lognormal  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ ,

$$M_o(t) = \exp(\mu_0 - \sigma_0^2) \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + (c - \frac{3\sigma^2}{2})(t - t_0)\right)$$

En el caso de la función de cuantiles, la expresión genérica es

$$C_\alpha(t) = Cuantil_\alpha[X(t)] = Cuantil_\alpha[X(t_0)] \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0)\right) \\ \times \exp\left(z_{1-\alpha} \left[\sqrt{\sigma^2(t - t_0) + Var[\ln(X(t_0))]} - \sqrt{Var[\ln(X(t_0))]}\right]\right),$$

donde  $z_{1-\alpha}$  es el valor de una normal estándar que deja a la derecha una probabilidad de  $1 - \alpha$  y  $\xi$  es el segundo parámetro de la distribución lognormal correspondiente a  $X(t)$  en cada uno de los dos casos considerados. Así,

- si la distribución inicial es degenerada,  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ ,

$$C_\alpha(t) = x_0 \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + z_{1-\alpha}\sigma\sqrt{t - t_0}\right),$$

- si la distribución inicial es lognormal  $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ ,

$$C_\alpha(t) = \exp\left(\mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_0^2}\right) \exp\left(-\frac{m}{b} [e^{-bt} - e^{-bt_0}] + (c - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0)\right) \times \\ \times \exp\left(z_{1-\alpha} \left[\sqrt{\sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2} - \sqrt{\sigma_0^2}\right]\right),$$

pudiéndose calcular también las versiones condicionadas de tales funciones a partir de (11).

## Referencias

- [1] CAPOCELLI, R. M. and RICCIARDI, L. M. (1974). *L. Growth with regulation in random environment*. Kybernetik 15, 147-157.
- [2] R.GUTIERREZ, N. RICO, P. ROMÁN, D. ROMERO y F. TORRES (2003). *Obtención de un proceso de difusión no homogéneo a partir de modelos de crecimiento*. Actas del XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.
- [3] CAPOCELLI, R. M. and RICCIARDI, L. M. (1974). *A diffusion model for population growth in random environment*. Theoretical Population Biology, 5, 28-41.
- [4] ROMERO, D.(2005). *Aportaciones al estudio de modelos estocásticos asociados a curvas de crecimiento: un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [5] GUTIERREZ, R., RICO, N., ROMÁN, P., ROMERO, D. y TORRES, F. (2003). *Obtención de un proceso de difusión no homogéneo a partir de esquemas discretos*. Actas del XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.
- [6] RICCIARDI, L. M. (1977). *Diffusion processes and related topics in Biology* Springer-Verlag.
- [7] ARNOLD, L. (1974). *Stochastic Differential Equations. Theory and Applications* John Wiley.
- [8] GÓMEZ, J. y BUENDÍA, F.(2001). *Una generalización de los procesos estocásticos Log-normal y de Gompertz como procesos de Itô* Questiió, vol. 25, 3, p. 393-414.
- [9] ISONI DA LUZ SANT'ANA(2011). *Estudio Comparativo de Procesos de Difusión Asociados con Curvas Gompertz* Trabajo de fin de Máster en Estadística Aplicada, Universidad de Granada
- [10] ROMÁN, P., D. ROMERO y TORRES, F. Apuntes de la asignatura *Aplicaciones de los modelos de difusión* del Máster de Estadística Aplicada, Universidad de Granada.