Series de tiempo: Modelos Heterocedásticos. Aplicación a una serie financiera usando **R**.

Ana Carolina Cabrera Blandón

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Granada, España

2016

Series de tiempo: Modelos Heterocedásticos. Aplicación a una serie financiera usando **R**.

Ana Carolina Cabrera Blandón

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de de:
Máster en Estadística Aplicada

Director:
Dr. Francisco Javier Alonso Morales

Línea de Investigación:
Análisis de series temporales. Aplicaciones a riesgos financieros

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Granada, España
2016

A mi familia. Especialmente a mis padres por su apoyo y compañía durante todo este tiempo. Sin sus cuidados y amor no hubiera sido posible.

A Armando Salgado por sus enseñanzas y su amor. Su legado vivirá siempre.

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Universidad de Granada por permitirme hacer parte de este Master, especialmente al doctor Francisco Javier Alonso Morales, por su guia, apoyo y paciencia durante este proceso. A mis amigos Alexander Carvajal y Yeison López por las largas jornadas de estudio y el gran apoyo brindado durante todo este tiempo.

Contenido

INTRODUCCIÓN

En la actualidad las series de tiempo se han convertido en una herramienta muy común e indispensable para resolver diversas situaciones presentadas en áreas del conocimiento como las finanzas, economía, matemáticas aplicadas, etc. Desde el desarrollo de modelos estocásticos con el fin de explicar, caracterizar y comprender distintas variables económicas involucradas en la actividad económica y financieras, hasta la simulación de complejos sistemas financieros a partir de datos generados por la actividad de la economía y los mercados financieros.

El objetivo de este trabajo es mostrar específicamente la aplicabilidad de las series de tiempo para resolver problemas en variables económicas, específicamente en las que se presenta una característica particular en las series de tiempo financieras, la volatilidad.

La volatilidad es una característica inherente a las series de tiempo financieras. En general, no es constante y en consecuencia los modelos de series de tiempo tradicionales que suponen varianza homocedástica, no son adecuados para modelar series de tiempo financieras. (Casas, Cepeda, 2008)

Cuando se trabaja con modelos ARMA(p,q) (procesos autorregresivos de medias móviles) normalmente se supone la varianza constante. Pero en las series de tiempo financieras no es muy común que se dé esto y los modelos tradicionales no son adecuados para modelarlas. Para ello se introduce una nueva clase de procesos estocásticos propuestos por Engle (1982), llamados modelos ARCH(modelo autorregresivo condicional heterocedástico), en donde la varianza condicionada a la información pasada no es constante,y los procesos GARCH propuestos por Bollerslev (1986), en donde la varianza condicional no depende solo de los cuadrados de los cuadrados de las perturbaciones, sino además de las varianzas condicionales de períodos anteriores. (Casas, Cepeda, 2008)

Este trabajo se divide en tres capítulos. El primero muestra un desarrollo teórico de los modelos ARMA y la nueva situación que se presenta con la volatilidad, que no es corregida por estos modelos. Posteriormente se muestra la fundamentación teórica de los modelos ARCH y GARCH, y como éstos permiten hacer una modelación adecuada cuando se presenta varianza no constante.

En el segundo capítulo se muestra la estimación de estos modelos usando el programa **R Project**, específicamente los comandos utilizados y las distintas opciones que se tienen para la modelación.
Y en el tercer capítulo se hace una aplicación real a una serie de datos financieros donde tienen un comportamiento con varianza variable y se ajustan a un modelo heterocedástico, utilizando el software R. Los datos corresponden al precio de la acción de la entidad Bancolombia desde la fecha comprendida entre el 2 de enero de 2006 hasta el día 6 de junio de 2016.

1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.

A continuación, se tratarán algunos conceptos básicos de las series de tiempo, posteriormente se mostrarán las características de los modelos ARMA, para finalizar con la fundamentación de los modelos ARCH y GARCH, los cuales son el objetivo principal de la realización de este trabajo.

1.1 Series de tiempo.

Una serie de tiempo es una secuencia de observaciones ordenadas, cada una de ellas está asociada a un momento de tiempo y están ordenadas cronológicamente. Una serie de tiempo puede ser univariante (sólo se analiza una serie de tiempo en función de sus datos pasado) o multivariante (se analizan varias series de tiempo a la vez).En este trabajo se utilizará solamente la teoría para el manejo de series univariantes.

El principal objetivo al analizar una serie de tiempo es poder hacer proyecciones o pronósticos para poder prever su evolución en el futuro cercano, lo cual permite planear y tomar decisiones a corto o largo plazo. Dado que las carácterísticas de las series son tan especificas, se han desarrollado modelos cuyo objetivo es recoger y aprovechar la dependencia entre las observaciones de la serie.

1.1.1 Objetivos al analizar series de tiempo.

Los objetivos que se pueden abordar al analizar una serie de tiempo son:

a) Hacer una descripción de las características de la serie en términos de sus componentes de interés. Esta descripción puede ser analizando algunos estadísticos resumen, una representación gráfica de los datos, hasta la modelación mediante una función que la caracterice.
b) Analizar su comportamiento para saber cuáles han sido los principales movimientos de la serie, si generan alguna tendencia.
c) Pronosticar valores de las variables. Cuando las observaciones sucesivas son dependientes, los valores futuros pueden ser predichos a partir de las observaciones pasadas. Si una serie temporal se puede predecir exactamente, entonces se dirá que es una serie determinista. Pero la mayoría de las series son estocásticas en que el futuro sólo se puede determinar parcialmente por sus valores pasados, por lo que las predicciones exactas son imposibles y

deben ser reemplazadas por la idea de que los valores futuros tienen una distribución de probabilidad que está condicionada al conocimiento de valores pasados (González, 2009).

1.1.2 Componentes de una serie de tiempo.

Al analizar series de tiempo, los datos se pueden descomponer en tres componentes para facilitar su estudio, cuya articulación da como resultado los valores arrojados por la serie.

a) Tendencia. Es el comportamiento o movimiento suave de la serie a largo plazo que se produce en relación con el valor medio de la serie. Representa el crecimiento o disminución en la serie sobre un período de tiempo. La tendencia caracteriza el patrón de variación de la serie, algunas se mueven hacia arriba constantemente, otras decrecen y otras permanecen igual en un período de tiempo.

b) Estacionalidad. Corresponde a los movimientos que tiene la serie que se pueden presentar con cierta periodicidad, es decir que tiene cierto comportamiento que suele repetirse en períodos de tiempo mensual, semestral, anual, etc.

c) Aleatoriedad. Esta componente no corresponde a ninguna caracteristica de comportamiento de la serie, sino que resulta de factores externos aleatorios que inciden de alguna manera sobre la serie. Por su naturaleza no es posible determinar cual será su impacto sobre la serie ya que su ocurrencia hace parte del azar.

1.2 Procesos estocásticos.

1.2.1 Definición.

Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Sea X una variable aleatoria, entonces el proceso estocástico se denota como X_t, si, X es una v.a (variable aleatoria) en tiempo discreto y se denota $X(t)$ si X es una v.a en tiempo continuo. Dado que los datos que se van a abordar en este trabajo corresponden a datos económicos y estos datos se toman en puntos de tiempo discreto, entonces se utilizará la notación X_t. Las series de tiempo son entonces un caso particular de los procesos estocásticos, y se representará $X_t = X_1, X_2, \dots, X_T$ con $t = 1,2, \dots, T$.

1.2.2 Tipos de procesos estocásticos.

Proceso estocástico de segundo orden será estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende sólo de la distancia o rezago entre estos dos periodos, y no del tiempo en el cual se calculó la covarianza (Gujarati, 2010). Un proceso estocástico será no es estacionario, por ejemplo, cuando la esperanza condicional de algunos de los componentes medidos en periodos distintos, no son iguales. En las series de tiempo esto se da cuando hay un cambio en la tendencia, por ejemplo los cambios en la media hace que haya un crecimiento o decrecimiento a largo plazo por lo que la serie oscila alrededor de un valor que no es constante (Villavicencio, 2014).

1.2.2.1 Procesos estocásticos estacionarios.

Un proceso estacionario es aquel en donde su media y varianza son constantes en el tiempo. Al analizar una serie de tiempo se utiliza la teoría de procesos estocásticos para determinar qué proceso puede explicar, generar y predecir la serie de tiempo.

Para ello no se puede utilizar cualquier tipo de proceso, para obtener predicciones consistentes con base a una observación temporal es imperativo que la estructura probabilística del mismo sea estable en el tiempo. Por lo tanto, es importante que el proceso estocástico generador de la serie tenga algún tipo de estabilidad, ya que para lograr una buena predicción se parte de la premisa de que se aprende de las regularidades del comportamiento pasado de la serie y se proyectan hacia el futuro.

El concepto de estacionariedad se puede caracterizar en téminos de la función de distribución o de las distribuciones marginales. En un primer caso se hablará de estacionariedad en sentido estricto y en segundo lugar de estacionariedad en sentido débil o en covarianza.

A) Estacionariedad en sentido estricto.

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico estacionario. $\{X_t\}$ es estacionario en el sentido estricto si $\{X_{t_1},\ X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ tiene la misma distribución de probabilidad de $\{X_{t_1+h},\ X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}\}$, $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $t, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$.

Esto implica que la media y la varianza de todas las variables son las mismas, al igual que lo son los coeficientes de asimetría y curtosis de las distribuciones marginales, ya que estas distribuciones son las mismas para todos los retardos.

Otra implicación es que la dependencia entre las variables sólo depende de sus retardos, es decir, la misma dependencia existe entre las variables X_t, X_{t+j}, X_{t+j+k}que entre las variables $X_{t+h}, X_{t+h-j}, X_{t+h-j-k}$ (Peña, 2005).

B) Estacionariedad en sentido débil.

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico, se llama estacionario en sentido débil si el valor de la media y la varianza son constantes a lo largo del tiempo, además el valor de la covarianza entre dos puntos en el tiempo dependerá unicamente de la distancia (o rezago) entre ellos, y no del tiempo en el cual se este calculando la covarianza.

Es decir que el proceso cumple las siguientes propiedades:

1. $E(X_t) = E(X_{t+h}) = \mu$, $\forall h > 0$
2. $Var(X_t) = Var(X_{t+h}) = \sigma^2$, $\forall h > 0$
3. $\gamma_h = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$ no depende de t y donde $h > 0$

C) Ruido blanco.

Se puede definir el ruido blanco (o "White noise"), como un caso de un proceso estocástico, donde los valores de dicha serie son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo, con una media de cero y varianza constante. Se denota de la siguiente manera:

$$z_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Además, $\gamma_h = Cov(z_i,\ z_j) = 0 \forall z_i \neq z_j$.

D) Caminata aleatoria.

La caminata aleatoria es un proceso estocástico x_t, el cual tiene la característica que al aplicar la primera diferencia el resultado será una serie Ruido blanco. En otras palabras $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = z_t$

1.2.3 Caracterización de los procesos estocásticos.

Un proceso estocástico queda caracterizado si se define la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias$X_1, X_2, \dots, X_T$, para cualquier valor de T. Estas distribuciones permiten conocer la estructura probabilística del proceso estocástico, y en particular las distribuciones marginales de cada variable, que quedan definidas en el caso normal, en función del vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas entre las variables (Peña, 2005).

a) Función de Medias.
Es una función que depende del tiempo y proporciona las esperanzas de las distribuciones marginales X_t para cada instante:

$$E(X_t) = \mu_t \tag{1.1}$$

Cuando se tiene un proceso estacionario, podría pensarse que este valor esperado fuera constante, esto implicaría que no habría tendencia en la serie y se dirá que el proceso es estable en la media.

b) Función de varianzas.
Es una función que proporciona las varianzas en cada instante de tiempo:

$$Var(X_t) = \sigma_t^2 \tag{1.2}$$

Se dirá que el proceso es estable en varianza si ésta es constante. Un proceso puede ser estable en media, pero no en varianza, y viceversa. Esta situación se pondrá en evidencia más adelante cuando se esté analizando los procesos estocásticos estacionarios.

c) Función de autocovarianzas.

Es una función de dos argumentos t y $t+h$, que describe las covarianzas entre dos variables del proceso estocástico en dos instantes cualesquiera:

$$\gamma(t,t+h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t+h} - \mu_{t+h})] \qquad (1.3)$$

Dado que las dimensiones de las autocovarianzas son al cuadrado, no permite comparar series medidas en unidades distintas, para ello se utiliza el coeficiente de autocorrelación, que es una medida adimensional de orden $(t,t+h)$y será el coeficiente de correlación entre dos variables X_t, X_{t+h}.

d) Función de autocorrelación.

Es la función de dos argumentos que describe los coeficientes de autocorrelación para dos valores cualesquiera de las variables:

$$\rho(t,t+h) = \frac{Cov(t,t+h)}{\sigma_t \sigma_{t+h}} = \frac{\gamma(t,t+h)}{\gamma^{1/2}(t,t)\gamma^{1/2}(t+h,t+h)} \qquad (1.4)$$

Además de estudiar las distribuciones marginales, es de gran interés estudiar las distribuciones condicionales en los procesos estocásticos. La distribución condicional de X_t dada $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}$, representa lo se puede decir de esta variable cuando se conoce los k valores anteriores del proceso. Un caso particular de esta distribución son los procesos de Markov, que tienen la propiedad de que:

$$f(X_{t+1}|X_t, \dots, X_1) = f(X_{t+1}|X_t), \qquad t = 1,2, \dots,$$

Esto quiere decir, que la distribución de la variable aleatoria en cualquier instante dados los valores previos del proceso sólo depende del último valor observado. Un proceso es de Markov si conocido el valor actual del proceso la distribución del valor futuro sólo depende de ese valor, y no del camino recorrido para llegar hasta él (Peña, 2005).

A continuación se profundiza en los procesos estocásticos estacionarios, en particular los modelos ARMA que son unos modelos que permiten analizar y caracterizar una serie de tiempo estacionaria. Posteriormente se analizarán las series de tiempo que corresponden a procesos estacionarios que no son lineales en varianza, es decir que aunque su varianza marginal es constante, la varianza condicionada a los valores pasados de la serie no es constante, ya que depende de estos valores previos. Cuando la varianza condicionada no es estacionaria, se dice que la varianza es heterocedástica.

Esta nueva situación da lugar a nuevos modelos. El modelo ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedastic) propuesto por Engle (1982), supone que la varianza condicional depende del pasado con estructura autorregresiva. Y el modelo GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic), que fue generalizado por Bollerslev (1986), e incorpora a esta dependencia términos de media móvil (Peña, 2005).

1.3 Autocorrelación.

En el área de las series de tiempo, las observaciones tomadas en el tiempo pueden tener cierta dependencia entre ellas, donde un valor depende de los anteriores. Con el fin de determinar dicha relación, se definen dos funciones, la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP) (Rodríguez, 2016).

1.3.1 Función de autocorrelación (FAC).

La autocorrelación de un proceso estocástico mide el grado de asociación lineal que hay entre dos variables aleatorias separadas por h períodos:

$$Corr(X_t, X_{t+h}) = \rho(t, t+h) = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{\sigma(t)\cdot\sigma(t+h)} = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \qquad (1.5)$$

La función de autocorrelación es una función que recoge el conjunto de los coeficientes de autocorrelación del proceso. Se denota por $\rho(h) = \rho_h$, y cumple las siguientes propiedades:

1. $\rho(0) = 1$
2. $\rho(h) = \rho(-h)$ es una función par.
3. $\rho(h)$ definida no negativa.

1.3.2 Función de autocorrelación parcial (FACP).

Se puede definir la autocorrelación parcial como la correlación que existe entre dos variables que están separadas por h períodos, cuando no se tiene en cuenta la dependencia creada por los rezagos intermedios entre ambas, es decir:

$$\pi_j = corr\left(X_j, X_{j-h}/X_{j-1}X_{j-2} \dots X_{j-h+1}\right)$$

$$\pi_j = \frac{cov(X_j - \hat{X}_j, X_{j-h} - \hat{X}_{j-h})}{\sqrt{var(X_j - \hat{X}_j)}\sqrt{var(X_{j-h} - \hat{X}_{j-h})}} \tag{1.6}$$

1.4 Modelos lineales estacionarios.

Al analizar series de tiempo el objetivo principal es utilizar la teoría de los procesos estocásticos para poder determinar qué proceso será capaz de caracterizar el comportamiento de la serie y así poder hacer predicciones. A continuación, se considerarán únicamente los procesos lineales los cuales se caracterizar por ser presentados como una combinación lineal de variables aleatorias. En las series financieras, por ejemplo, uno de los objetivos principales es la predicción, entonces la estacionalidad es un elemento principal a analizar tanto como otras características de los datos. En esta sección se estudiarán algunos modelos econométricos que son útiles en la modelación de series de tiempo estacionarias particularmente series financieras (González, 2009).

Para realizar una revisión de estos modelos, es importante definir lo siguiente:

A. El operador de retardo.

Se define el operador de retardo, B, como un operador lineal que aplicado a una función temporal proporciona esta misma función retardada un periodo (Peña, 2005).

Por definición: $Bf(t) \equiv f(t-1)$, esta notación debe interpretarse como una operación aplicada a una función, $f(t)$, que proporciona otra función $f(t-1)$.

En particular, si se aplica el operador de retardo a una serie de tiempo, se obtiene la misma serie de tiempo retardada un periodo, y se escribe:

$$BX_t = X_{t-1}$$

Propiedades:

- Si $k \in \mathbb{R}, (kB)(X_t) = kX_{t-1}$
- Si $n \in \mathbb{N},\ B^n(X_t) = B(B^{n-1}X_t) = X_{t-n}$
- Si $a, b \in \mathbb{R},\ (aB^m + bB^n) = aX_{t-m} + bX_{t-n}$

B. La descomposición de Wold.

Los procesos autorregresivos y de media móvil que se van estudiar son casos particulares de una representación general de procesos estacionarios obtenida por Wold (1938). Este autor demostró que todo proceso estocástico débilmente estacionario X_t, de media finita, μ, que no contenga componentes deterministas, puede escribirse como una función lineal de variables aleatoriasincorreladas, a_t, como (Peña, 2005):

$$X_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}\ \psi_0 = 1 \qquad (1.7)$$

donde $E(X_t) = \mu$, y $E(a_t) = 0;\ Var(a_t) = \sigma^2;\ E(a_t a_{t-h}) = 0,\ h > 1.$

1.4.1 Procesos autorregresivos:AR(p).

El modelo sobre X_t dependerá de valores pasados de la variable en el tiempo, satisfaciendo la ecuación de diferencias (Rodríguez, 2016):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + z_t \qquad (1.8)$$

Con $t \in \mathbb{Z}$, donde $\phi \in \mathbb{R}$, $\{z_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y además $E(X_s \cdot z_t) = 0, para\ s, t \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ s < t.$

En términos del operador de retardos,

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) X_t = z_t \quad \rightarrow \quad \phi_p(B) X_t = z_t$$

donde $\phi_p(B)$ recibe el nombre de polinomio autorregresivo y $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)$ es el vector de parámetros autorregresivos.

1.4.1.1 Proceso autorregresivo de orden 1: AR(1).

El proceso autorregresivo de orden 1, o AR(1), es un proceso donde la variable de interés X_t depende únicamente por el valor pasado anterior, en otras palabras, un proceso $\{X_t\}$ estacionario que satisface la ecuación en diferencias estocástica lineal

$$X_t = \phi X_{t-1} + z_t \tag{1.9}$$

Con $t \in \mathbb{Z}$, donde $\phi \in \mathbb{R}$,$\{z_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y además $E(X_s \cdot z_t) = 0, para\ s,t \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ s < t,$ se denomina modelo AR(1).

$X_t$se puede expresar de la siguiente manera:

$$X_t = \phi X_{t-1} + z_t$$

$$X_t = \phi(\phi X_{t-2} + z_{t-1}) + z_t$$

$$= \phi^2 X_{t-2} + \phi z_{t-1} + z_t$$

$$= \phi^2(\phi X_{t-3} + z_{t-2}) + \phi z_{t-1} + z_t$$

$$= \phi^3 X_{t-3} + \phi^2 z_{t-2} + \phi z_{t-1} + z_t$$

$h$pasos adelante se tiene:

$$X_t = \phi^{h+1} X_{t-h-1} + z_t + \phi z_{t-1} + \cdots + \phi^h z_{t-h}$$

$X_t = \sum_{d=0}^{\infty} \phi^d\, z_{t-d}$, cuando $h \to \infty$

Con el fin de verificar si el proceso AR(1) es estacionario, se verifican las pruebas de media y covarianza constantes:

1. **Esperanza del proceso.**

   Para que un proceso sea estacionario, en primer lugar se debe validad que la media es constante y finita en el tiempo, utilizando la ecuación (1.8) se tiene:

$$E(X_t) = E(\phi X_{t-1} + z_t)$$
$$E(X_t) = \phi E(X_{t-1}) + E(z_t)$$

   Como $E(z_t) = 0$ ya que $\{z_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y $E(X_t) = E(X_{t-1})$, porque $X_t$es un proceso estocástico estacionario, entonces se tiene:

$$E(X_t) = \phi E(X_{t-1})$$

$$E(X_t) = \phi E(X_t)$$
$$E(X_t) - \phi E(X_t) = 0$$
$$(1 - \phi)E(X_t) = 0$$
$$E(X_t) = 0$$

Por lo tanto, el proceso tendrá media constante y finita cuando el parámetro $\phi \neq 1$

2. Función de autocovarianza y autocorrelación.

Para que un proceso sea estacionario, debe cumplir que la función de autocovarianza y autocorrelación no dependan del tiempo. Entonces:

$$\gamma_h = E\left[\left(X_t - E(X_t)\right)\left(X_{t-h} - E(X_{t-h})\right)\right]$$

Como $E(X_t) = E(X_{t-h}) = 0$, ya que es el proceso es estacionario y la esperanza del proceso es cero.

$$\gamma_h = E\left((\phi X_{t-1} + z_t) \cdot X_{t-h}\right)$$
$$\gamma_h = \phi E(X_t \cdot X_{t-h}) + E(z_t \cdot X_{t-h})$$

$$\gamma_h = \phi \gamma_{h-1}$$

De lo anterior se tiene:

$$\gamma_1 = \phi \gamma_0$$

$$\gamma_2 = \phi \gamma_1$$

$$\gamma_3 = \phi \gamma_2$$

$$\vdots$$

Donde γ_0 estará dado por:

$$\gamma_0 = E\left[\left(X_t - E(X_t)\right)\left(X_t - E(X_t)\right)\right]$$

$$\gamma_0 = E(X_t)^2$$

$$\gamma_0 = E(\phi X_{t-1} + z_t)^2$$

$$\gamma_0 = Var(\phi X_{t-1} + z_t) + [E(\phi X_{t-1} + z_t)]^2$$

$$\gamma_0 = Var(\phi X_{t-1} + z_t)$$

$$\gamma_0 = \phi^2 Var(X_{t-1}) + Var(z_t)$$

$$\gamma_0 = \phi^2 Var(X_t) + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 - \phi^2\gamma_0 = \sigma^2$$

$$(1 - \phi^2)\gamma_0 = \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Se puede afirmar que el proceso autorregresivo de orden 1 AR(1) es estacionario en sentido débil si y solo si $|\phi| < 1$. Y su función de autocovarianza estará dada por:

$$\gamma_h = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1 - \phi^2} & h = 0 \\ \phi\gamma_{h-1} & h > 0 \end{cases}$$

La función de autocorrelación de un proceso autorregresivo de orden 1 AR(1) está dado por:

$$\rho_h = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \phi\rho_{h-1} & h > 0 \end{cases} \text{, entonces } \rho_h = \rho^h, \quad h \geq 0$$

Se puede concluir que para un proceso AR(1):

- ✓ El modelo AR(1) es estacionario siempre que $|\phi| < 1$.
- ✓ La representación gráfica de la función de autocorrelación mostrará un comportamiento hacia cero con todos sus valores positivos cuando $\phi > 0$, mientras que si $\phi < 0$ se alternará el signo, comenzando con negativo (Villavicencio, 2014).

1.4.1.2 Proceso autorregresivo de orden 2: AR(2)

Al analizar el proceso de orden 2, la variable X_t, tendrá la siguiente ecuación en diferencias:

$$X_t = \phi_1 X + \phi_2 X_{t-2} + z_t, \tag{1.10}$$

Con $t \in \mathbb{Z}$, donde $\phi \in \mathbb{R}$, $\{z_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y además $E(x_s \cdot z_t) = 0, para\ s, t \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ s < t$.

Con el fin de verificar si el proceso AR(2) es estacionario, se deben verificar las pruebas de media y covarianza constantes:

1. **Esperanza del proceso.**

   Para que el proceso sea estacionario se debe validar que la media sea constante y finita en el tiempo. En términos del operador de retardo se tiene:

$$E\left((1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)X_t\right)=E(z_t)$$
$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)E(X_t)=0$$
$$E(X)=\frac{0}{1-\phi_1 B-\phi_2 B^2}$$
$$E(X_t)=0$$

2. **Función de autocovarianza y autocorrelación.**

   Se debe verificar que la la función de autocovarianza y autocorrelación no dependen del tiempo, para mostrar que el proceso es estacionario (Villavicencio, 2014).

$$\gamma_h=E\left[\left(X_t-E(X_t)\right)\left(X_{t-h}-E(X_{t-h})\right)\right]$$

$$\gamma_h=E[(X_t)(X_{t-h})]$$

$$\gamma_h=E[(\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+z_t)(X_{t-h})]$$

$$\gamma_h=\phi_1\gamma_{h-1}+\phi_2\gamma_{h-2}$$

Donde γ_0 estará dado por:

$$\gamma_0=E\left(X_t-E(X_t)\right)^2=E(X_t)^2$$

$$\gamma_0=(\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+z_t)^2$$

$$\gamma_0=\phi_1^2\gamma_0+\phi_2^2\gamma_0+\sigma^2+2\phi_1\phi_2\gamma_1$$

$$\gamma_0-\phi_1^2\gamma_0-\phi_2^2\gamma_0=\sigma^2+2\phi_1\phi_2\gamma_1$$

$$\gamma_0=\frac{\sigma^2+2\phi_1\phi_2\gamma_1}{1-\phi_1^2-\phi_2^2}$$

Y γ_1 estará dado por:

$$\gamma_1=E[(X_t)(X_{t-1})]$$

$$\gamma_1=E[(\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+z_t)(X_{t-1})]$$

$$\gamma_1 = \phi_1 E(X_{t-1})^2 + \phi_2 E(X_{t-2} \cdot X_{t-1}) + E(z_t \cdot X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}$$

Se puede afirmar que el proceso es estacionario en sentido débil si y solo si $1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 \neq 0$ y $\phi_2 \neq 1$.

Entonces su función de covarianza estará dada por:

$$\gamma_h = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 + 2\phi_1\phi_2\gamma_1}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2} & h = 0 \\ \dfrac{\phi_1\gamma_0}{1 - \phi_2} & h = 1 \\ \phi_1\gamma_{h-1} + \phi_2\gamma_{h-2} & h > 1 \end{cases}$$

La función de autocorrelación de un proceso autoregresivoAR(2), estará dado por:

$$\rho_h = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \dfrac{\phi_1}{1 - \phi_2} & h = 1 \\ \phi_1\rho_{h-1} + \phi_2\rho_{h-2} & h > 1 \end{cases}$$

Para concluir con los procesos AR(p), se muestran las condiciones de estacionariedad para el modelo AR(1) y AR(2).

Modelo AR(1): De la ecuación expresada por el operador de retardo $(1 - \phi B)X_t = z_t$

Polinomio autorregresivo: $\phi_1(B) = 1 - \phi B$

Raíces: $1 - \phi B = 0 \Longrightarrow B = \frac{1}{\phi}$

La condición de estacionariedad para el modelo AR(1) es:

$$|B| = \left|\frac{1}{\phi}\right| > 1 \Longrightarrow |\phi| < 1$$

Modelo AR(2): De la ecuación expresada por el operador de retado $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)x_t = z_t$

Polinomio autorregresivo: $\phi_2(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$

Raíces: $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_1, B_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$

La condición de estacionariedad para el modelo AR(2) es:

$$|B_1| = \left| \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1 \quad \text{y} \quad |B_2| = \left| \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1$$

Si el radicando es positivo, las raíces son reales de lo contrario las raíces son complejas (González, 2009).

1.4.2 Procesos de Medias Móviles MA(q).

Un proceso de Medias Móviles, es un modelo donde la variable X_t estará determinada por factores externos, este tipo de modelos tienen como supuesta la linealidad (Rodríguez, 2016).

El modelo de Medias Móviles de orden q sigue la ecuación:

$$X_t = z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2} + \cdots + \theta_q z_{t-q} \tag{1.11}$$

Donde $z_t \sim RB(0, \sigma^2)$ y $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son los parámetros del modelo.

En términos del operador de retardos,

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) z_t = \theta_q(B) z_t$$

En la estructura de correlación temporal del modelo MA(1), la perturbación z_t aparece en el sistema en el momento t e influye en X_t e X_{t+1}únicamente, por lo que influye un solo periodo. Sin embargo, en un proceso autorregresivo la perturbación z_t aparece en el sistema en el momento t, influye en X_t y a través de $X_t$en las observaciones futuras, permaneciendo su influencia en el sistema un periodo más largo (González, 2009).

1.4.2.1 Proceso de Medias Móviles de orden 1, MA(1):

El modelo de Media Móvil de orden 1, determinará el valor de X_t en términos de la innovación actual y su primer retardo. Es decir, el proceso será una combinación lineal de las dos últimas innovaciones, de la siguiente manera (Peña, 2005):

$$X_t = z_t - \theta z_{t-1} \tag{1.12}$$

Con el fin de verificar si el proceso MA(1) es estacionario, se verifican las pruebas de media y covarianza constantes:

1. **Esperanza del proceso.**

   De acuerdo a la ecuación (1.12) el proceso tiene media:

$$E(X_t) = E(z_t - \theta z_{t-1})$$
$$E(X_t) = E(z_t) - \theta E(z_{t-1}) = 0 = cte$$

   Luego el proceso MA(1) es estacionario en media.

2. **Función de autocovarianza y autocorrelación.**

   Para que un proceso sea estacionario, debe cumplir que la función de autocovarianza y autocorrelación no dependan del tiempo.

   Para γ_0 se tiene,

$$\gamma_0 = E\big(X_t - E(X_t)\big)^2 = E(X_t)^2$$

$$\gamma_0 = E(z_t - \theta z_{t-1})^2$$

$$\gamma_0 = E(z_t)^2 + \theta^2 E(z_{t-1})^2 - 2\theta E(z_t z_{t-1})$$

$$\gamma_0 = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 - 0$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma^2$$

Para γ_1 y γ_2 se tiene,

$$\gamma_1 = E[(z_t - \theta z_{t-1})(z_{t-1} - \theta z_{t-2})]$$

$$\gamma_1 = -\theta\sigma^2$$

$$\gamma_2 = E[(z_t - \theta z_{t-1})(z_{t-2} - \theta z_{t-3})]$$

$$\gamma_2 = 0$$

Luego, la función de autocovarianzas de un MA(1) es:

$$\gamma_h = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & h = 0 \\ -\theta\sigma^2 & h = 1 \\ 0 & h > 1 \end{cases}$$

La función de autocovarianzas es finita y depende sólo de h y no del tiempo, para cualquier valor del parámetro θ.

La funcion de autocorrelación de un proceso MA(1) es:

$$\rho_h = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & h = 1 \\ 0 & h > 1 \end{cases}$$

Esta función se caracteriza por ser una funcion truncada que sufre un corte brusco tomando tomando el valor de cero a partir del retardo 1 (González, 2009).

1.4.2.2 Proceso de Medias Móviles de orden 2, MA(2):

Para analizar el proceso se tendrá en cuenta la ecuación:

$$X_t = z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2} \tag{1.13}$$

Donde $z_t \sim RB(0, \sigma^2)$

1. **Esperanza del proceso.**

   De acuerdo a la ecuación (1.13) el proceso tiene media:

$$E(X_t) = E(z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2}) = 0 = cte$$

2. **Función de autocovarianza y autocorrelación.**

   Para γ_0 se tiene,

$$\gamma_0 = E\big(X_t - E(X_t)\big)^2 = E(X_t)^2$$

$$\gamma_0 = E(z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2})^2$$

$$\gamma_0 = \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + \theta_2^2\sigma^2$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

Para γ_1 se tiene,

$$\gamma_1 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-1} - E(X_{t-1})\big)\big] = E(X_t X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E[(z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2})(z_{t-1} - \theta_1 z_{t-2} - \theta_2 z_{t-3})]$$
$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma^2 + \theta_1\theta_2\sigma^2 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2$$

Para γ_2 se tiene,

$$\gamma_2 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-2} - E(X_t)\big)\big] = E(X_t X_{t-2})$$

$$\gamma_2 = E[(z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2})(z_{t-2} - \theta_1 z_{t-3} - \theta_2 z_{t-4})]$$
$$\gamma_2 = -\theta_2\sigma^2$$

Para γ_3 se tiene,

$$\gamma_3 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-3} - E(X_t)\big)\big] = E(X_t X_{t-3})$$

$$\gamma_3 = E[(z_t - \theta_1 z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2})(z_{t-3} - \theta_1 z_{t-4} - \theta_2 z_{t-5})]$$
$$\gamma_3 = 0$$

La función de autocovarianzas de un MA(2) es:

$$\gamma_h = \begin{cases} \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 & h = 0 \\ \gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2 & h = 1 \text{ y}0 \quad h > 2 \\ \gamma_2 = -\theta_2\sigma^2 & h = 2 \end{cases}$$

La función de autocorrelación de un MA(2) es:

$$\rho_h = \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & h = 1 \\ \rho_2 = \dfrac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & h = 2 \\ \rho_3 = 0 & h > 2 \end{cases}$$

Para concluir con los procesos MA(q), se muestran las condiciones de invertibilidad para el modelo MA(1) y MA(2) (González, 2009).

Modelo MA(1): De la ecuación expresada por el operador de retado $X_t = (1 - \theta B)z_t$

Polinomio medias móviles:$\theta_1(B) = 1 - \theta B$

Raíces: $1 - \theta B = 0 \Longrightarrow B = \frac{1}{\theta}$

La condición de invertibilidad para el modelo MA(1) es:

$$|B| = \left|\frac{1}{\theta}\right| > 1 \Longrightarrow |\theta| < 1$$

Modelo MA(2): De la ecuación expresada por el operador de retado $x_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) z_t$

Polinomio de medias móviles: $\theta_2(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$

Raíces: $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_1, B_2 = \frac{\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}$

La condición de invertibilidad para el modelo MA(2) es:

$$|B_1| = \left|\frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}\right| > 1 \quad \text{y} \quad |B_2| = \left|\frac{\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2}\right| > 1$$

1.4.3 Procesos autorregresivos de Medias Móviles:ARMA(p,q).

Algunas de las series de tiempo, X_t, pueden ser expresadas en términos de procesos Autorregresivos y de Medias Móviles en el tiempo, por lo cual se denomina modelos ARMA de ordenes p y q. Este proceso determina a X_t en función de su pasado hasta el retardo p, de la innovación contemporánea y el pasado de la innovación hasta el retardo q (González, 2009).

La notación de un proceso ARMA(p, q) será de la siguiente manera:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + z_t + \theta_1 z_{t-1} + \cdots + \theta_q z_{t-q}$$
(1.14)

Con $z_t \sim RB(0, \sigma^2)$

El modelo en términos del operador de retardos queda de la siguiente manera:

$$\left(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p\right) X_t = \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right) z_t$$

$$\phi_p(B) X_t = \theta_q(B) z_t$$

Donde $\phi_p(B)$ es el polinomio autorregresivo y $\theta_q(B)$ es el polinomio medias móviles.

Para un proceso ARMA(p, q) la condición de estacionariedad es la misma que para un proceso AR(p) y la condición de invertibilidad es la misma que para un proceso MA(q) (Villavicencio, 2014). Adicional a ello comparte las mismas características de estos modelos. El modelo ARMA(p, q) tiene media cero, varianza constante y finita y una función de autocovarianzas infinita. La función de autocorrelación es infinita decreciendo rápidamente hacia cero, pero sin truncarse (González, 2009).

1.4.3.1 Proceso Autorregresivo de Medias Móviles de orden (1, 1), ARMA(1,1):

El modelo ARMA(1,1) tiene la siguiente estructura:

$$X_t = \phi X_{t-1} + z_t - \theta z_{t-1} \tag{1.15}$$

Donde X_t esta en función de su pasado hasta el primer retardo, la innovación contemporánea y el pasado de la innovación hasta el retardo 1, además $z_t \sim RB(0, \sigma^2)$, $|\phi| < 1, \theta \in \mathbb{R}$ y $|\theta| < 1$

Con el fin de verificar si el proceso ARMA(1, 1) es estacionario, se verifican las pruebas de media y covarianza constantes:

1. **Esperanza del proceso.**

   Por definición y características del proceso:

$$E(X_t) = E(\phi X_{t-1} + z_t - \theta z_{t-1})$$
$$E(X_t) = E(\phi X_{t-1})$$
$$E(X_t) = \phi E(X_{t-1}) = 0$$

2. **Función de autocovarianza y autocorrelación.**

   Para que un proceso sea estacionario, debe cumplir que la función de autocovarianza y autocorrelación no dependan del tiempo.

   Para γ_0 se tiene,

$$\gamma_0 = E\big(X_t - E(X_t)\big)^2 = E(X_t)^2$$

$$\gamma_0 = E(\phi X_{t-1} + z_t - \theta z_{t-1})^2$$

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 - 2\phi\theta\sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta^2 - 2\phi\theta)\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

Para γ_1 se tiene,

$$\gamma_1 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-1} - E(X_{t-1})\big)\big] = E(X_t X_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E[(\phi X_{t-1} + z_t - \theta z_{t-1})X_{t-1}]$$
$$\gamma_1 = \phi\gamma_0 - \theta\sigma^2$$

Para γ_2 se tiene,

$$\gamma_2 = E\big[\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-2} - E(X_{t-2})\big)\big] = E(X_t X_{t-2})$$

$$\gamma_2 = E[(\phi X_{t-1} + z_t - \theta z_{t-1})X_{t-2}]$$

$$\gamma_2 = \phi\gamma_1$$

La función de autocovarianzas de un ARMA(1, 1) es:

$$\gamma_h = \begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi\theta)\sigma^2}{1 - \phi^2} & h = 0 \\ \gamma_1 = \phi\gamma_0 - \theta\sigma^2 & h = 1 \\ \gamma_h = \phi\gamma_{h-1} & h > 1 \end{cases}$$

La función de autocorrelación de un ARMA(1, 1) es:

$$\rho_h = \begin{cases} \rho_1 = \phi - \dfrac{\theta\sigma^2}{\gamma_0} & h = 0 \\ \rho_h = \phi\, \rho_{h-1} & h > 1 \end{cases}$$

Con respecto a la función de autocovarianzas, se observa que la varianza cuenta con una parte que proviene de la parte de medias móviles, otra que proviene de la parte autorregresiva y una tercera parte que es la interacción entre ambas partes del modelo. Y la función de autocorrelación (ACF), presenta la misma estructura, es decir, es una función cuyo primer coeficiente, ρ_1, depende de los parámetros autorregresivos y de medias móviles, pero que a partir del retardo 2, decrece exponencialmente, siguiendo la estructura dada por la parte autorregresiva de orden 1 (González, 2009).

Para comprobar estacionariedad e invertibilidad del proceso ARMA(1,1), se deben calcular las raíces del polinomio autorregresivo y las raíces del polinomio medias móviles, respectivamente:

Raíces del polinomio autorregresivo:

$$1 - \phi B = 0 \quad \Longrightarrow B = \frac{1}{\phi} \qquad \Longrightarrow \qquad |B| = \left|\frac{1}{\phi}\right| \Longrightarrow |\phi| < 1$$

Raíces del polinomio medias móviles:

$$1 - \theta B = 0 \quad \Longrightarrow B = \frac{1}{\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad |B| = \left|\frac{1}{\theta}\right| \Longrightarrow |\theta| < 1$$

1.5 Modelos lineales no estacionarios.

Los modelos anteriomente trabajados, tienen la caractestica de tener media y varianza constantes y las autocovarianzas no dependen del tiempo sino sólo de los retardos. En las series de tiempo económicas, que es el principal tema de estudio en el presente trabajo, la mayoría de los casos no se comportan de forma estacionaria, ya sea porque suelen ir cambiando de nivel en el tiempo o porque la varianza no es constante (Villavicencio, 2014).

En finanzas, las series de tiempo de interés, tasas de cambio, o series de precios de un activo son de gran interés para este tipo de procesos no estacionarios. Para una serie de precios de algún activo en particular, la no estacionariedad es debida principalmente al hecho de que no hay un nivel fijo de precios (Monsalve, 2011).

1.5.1 Proceso Autorregresivo Integrado de Media Móvil ARIMA(p, d, q).

Se llamará proceso ARIMA(p, d, q), al modelo definido de la siguiente manera:

$$\left(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p\right)(1 - B)^d X_t = c + \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right) z_t \qquad (1.16)$$

Donde p es el orden de la parte autorregresiva estacionaria, q es el orden de la parte media móvil y d es el número de raíces unitarias (orden de integración del proceso), en otras palabras, d es el número de veces que la serie debe ser diferenciada para hacerla estacionaria. Utilizando el operador diferencia, $\nabla = 1 - B$, el proceso anterior puede escribirse (Peña, 2005):

$$\phi_p(B)\nabla^d X_t = c + \theta_q(B)z_t \tag{1.17}$$

En este caso el término *integrado*, indique que si se nombra $\omega_t = \nabla^d X_t$ al proceso estacionario, X_t se obtiene como suma (integración) de ω_t. En efecto, si $\omega_t = (1 - B)X_t$como:

$$(1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + B^3 + \cdots$$

Entonces:

$$X_t = (1 - B)^{-1}\omega_t = \sum_{j=-\infty}^{t} \omega_t \tag{1.18}$$

A continuación se presentan dos modelos ARIMA sencillos:

1.5.1.1 Modelo de Paseo Aleatorio.

El paseo aleatorio es un modelo AR(1) con parámetro $\phi = 1$:

$$X_t = X_{t-1} + z_t \tag{1.19}$$

$$\nabla X_t = z_t$$

En este modelo el valor de x en el tiempo t es igual a su valor en el tiempo $t - 1$ más una perturbación aleatoria. El paseo aleatorio no es estacionario porque la raíz del polinomio AR no tiene módulo mayor que la unidad (González, 2009):

$$1 - B = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 1$$

Como la primera diferencia de la serie ∇X_t es un ruido blanco, se tiene que X_t es un proceso integrado de orden 1. El proceso es no estacionario puesto que la raíz del polinomio asociaso es igual a la unidad y la serie va cambiando de forma estocástica a lo largo del tiempo. El paseo aleatorio es parte de los procesos no estacionarios de raíces unitarias.

La función de autocovarianza y autocorrelación esta dada por:

$$\gamma_h = t\sigma^2 \qquad \text{y} \qquad \rho_h = \frac{t}{\sqrt{t(t+h)}} \qquad \text{para } h > 0$$

1.5.1.2 Modelo de Paseo Aleatorio con deriva.

El paseo aleatorio con deriva resulta de añadir una constante al modelo anterior.

$$X_t = X_{t-1} + z_t + \delta \tag{1.20}$$

$$\nabla X_t = z_t + \delta$$

En este caso, la inclusión de una constante en el modelo implica la inclusión de una tendencia determinista con pendiente δ, junto con la tendencia estocástica (González, 2009).

1.6 Modelos Heterocedásticos Condicionales.

Como se mostró anteriormente en los modelos ARMA, la varianza marginal y la varianza condicional son constantes, lo cual permite hacer una modelación de las series de tiempo que tienen éstas caracteristicas en varianza. Sin embargo, en las series financieras, en la mayoria de los casos se presenta volatilidad, es decir varianza condicional variable.

La volatilidad es una característica en los mercados financieros, su medición y pronóstico es de vital importancia para los operadores para asegurarse o apalancarse frente a eventos que conlleven a perdidas que no se puedan cubrir. De manera que la ausencia de un análisis de volatilidad debilita todo el proceso de toma de decisiones. Al considerarse la volatilidad como un proceso estocástico, lo que se quiere es ajustar un modelo que permita describir y analizar su comportamiento en el tiempo y a partir de éste, su comportamiento futuro (Rodríguez, 2009).

A continuación se presentan los modelos ARCH y GARCH. Pero antes de define que es el retorno de un activo financiero, que es uno de los conceptos más importantes a tener en cuenta para abordar estos nuevos modelos.

1.6.1 Retorno de un activo financiero.

Un activo financiero es un activo intangible (representa una obligación legal sobre algún beneficio futuro, Fabozzi, 1996) dado que su valor o beneficio es una obligación de dinero a futuro. Un ejemplo de ello son las acciones de una entidad, éstas generan al inversionista unos dividendos, distribuidos por la empresa que vende las acciones; estos pagos estarán relacionados con las ganancias de la empresa. El que posee una acción no tiene certeza de la cantidad que ganará al invertir, ni del momento que paguen los dividendos (Casas, Cepeda, 2008).

Sea P_t, $t = 1, 2, \ldots$ el precio de un activo en el tiempo t. Asumiendo que el activo no paga dividendos, su tendencia por un período de tiempo, desde $t-1$ hasta t, producirá un retorno definido como:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1.21}$$

Y su tendencia para k períodos desde un tiempo $t-k$ hasta t, produce un retorno simple definido como:

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} \tag{1.22}$$

Se define sobre este período de tiempo el log-retorno (r_t), mediante la expresión:

$$r_t = \ln(R_t + 1) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \tag{1.23}$$

Esta serie de los log-retornos, se que llamará *serie de los retornos*, no tiene unidades, es estable en la media y facilita el cálculo de un retorno compuesto k períodos desde el tiempo $t-k$ hasta el tiempo t (Tsay, 2002). Así:

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(R_t[k] + 1) = \ln\left(\prod_{i=0}^{k-1}(R_{t-i} + 1)\right) \qquad (1.24) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1} \end{aligned}$$

1.6.2 Modelos autorregresivos condicionales heterocedásticos ARCH.

El modelo autorregresivo condicional heterocedástico ARCH, fue propuesto por Engle (1982) para poder modelar series de tiempo con periodos de turbulencia y de calma, y a largo plazo sigan siendo estacionarias. La familia de procesos ARCH está definida como se sigue (Rodríguez, 2009).

1.6.2.1 Modelo autorregresivo condicional heterocedástico de orden p: ARCH(p)

Si la variable aleatoria $\{y_t\}$ donde ($t \in I$, I es un conjunto discreto de índices), es muestreada de la función de densidad condicional $f(y_t|\psi_{t-1})$, el pronóstico del valor actual de la variable condicionado a la información pasada ψ_{t-1} es $\mu_t = E(y_t|\psi_{t-1})$. La media puede modelarse a través del modelo de regresión$\mu_t = x_t\beta$, donde $x_t = (1, x_{t1}, \dots, x_{tk})$ es el vector de observaciones de las variables independientes y $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ es un vector de parámetros desconocidos. La varianza condicional, $Var(y_t|\psi_{t-1})$, depende de la información pasada y esta dependencia puede modelarse mediante la función $h_t(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \epsilon_{t-p}, \alpha)$, la cual se tiene en cuenta que la varianza es positiva y donde $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_p)$ es un vector de parámetros desconocidos. En este modelo, $\epsilon_t = y_t - x_t\beta$ para $t \in I$ y la información ψ_{t-1} es el sigma álgebra generada por $\{\epsilon_{t-1},\ \epsilon_{t-2}, \dots\}$(Casas, Cepeda, 2008).

Un proceso $\{y_t\}$ es un proceso ARCH(p) si (Engle, 1982):

$$y_t|\psi_{t-1} \sim N(\mu_t, h_t) \tag{1.25}$$

$$\mu_t = x_t\beta \tag{1.26}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p\epsilon_{t-p}^2 \tag{1.27}$$

$$\epsilon_t = y_t - x_t\beta \tag{1.28}$$

Donde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$

De los supuestos del modelo se deduce que $\epsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$ y si el proceso $y_t|\psi_{t-1}$ tiene media $\mu_t = 0$, $\epsilon_t = y_t$. En este caso, el modelo se puede expresar de esta manera:

$$\epsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \tag{1.29}$$

$$y_t = \epsilon_t h_t^{1/2} \tag{1.30}$$

Que es el modelo propuesto ARCH(p) por Engle (1982).

1.6.2.2 Proceso ARCH(1)

En este proceso la varianza condicional depende de un retardo de la serie y tiene una estructura similar a un AR(1) y por lo tanto solo depende del último valor observado. A continuación se muestran los procedimientos para llegar a los momentos de orden 1 y 2 del proceso (Rodríguez, 2009).

A. Esperanza y varianza no condicionales

De las ecuaciones (1.27) y (1.30) se tiene que el primer y segundo momento no-condicionales, del proceso y_t, están dados por (Rodríguez, 2009):

Media

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E\left(\epsilon_t h_t^{1/2}\right) \\ &= E(\epsilon_t)E\left[(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2}\right], \qquad z_t \perp y_s, \qquad s < t \\ &= 0\ (E(\epsilon_t) = 0) \end{aligned}$$

Varianza

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E(y_t^2) \\ &= E(\epsilon_t^2)E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2), \qquad ya\ que\ \ E(\epsilon_t^2) = 1 \end{aligned}$$

Esto se tiene para todo t. Tomando $E(y_{t-1}^2)$ en función de $E(y_{t-2}^2)$, se tiene:

$$E(y_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-2}^2)]$$

De forma análoga, regresando k-veces hacia el pasado y dado que $\alpha_1 < 1$ tenemos:

$$E(y_t^2) = \sum_{j=0}^{k-1}\left[\alpha_0\alpha_1^j + \alpha_1^k E(y_{t-k}^2)\right]$$

Llevando $k \longrightarrow \infty$ la ecuación anterior se convierte en

$$E(y_t^2) = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j.$$

Por lo tanto

$$E(y_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

B. Función de autocovarianza

La conclusión final a partir de los resultados de la presente sección y las anteriores es que un proceso ARCH(1), cumple con las condiciones de un ruido blanco (media cero y varianza constante).

En adelante ψ_{t-1} denota la σ-álgebra generada por $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$, es decir; ψ_{t-1} es la información observada hasta el punto $t-1$.

Usando las ecuaciones (1.27) y (1.30) se tiene:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= \epsilon_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 \epsilon_t^2 + \alpha_1\, \epsilon_t^2 y_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Reemplazando y_{t-1}^2 en y_t^2, se obtiene:

$$\begin{aligned} y_t^2 &= \alpha_0 \epsilon_t^2 + \alpha_1(\alpha_0 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_1\, \epsilon_t^2 y_{t-2}^2) \\ &= \alpha_0 \epsilon_t^2 + \alpha_1 \alpha_0 \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2\, \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 y_{t-2}^2 \\ &= \cdots \\ &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \dots \epsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^{k+1} \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \dots \epsilon_{t-k}^2 y_{t-k-1}^2 \end{aligned}$$

Haciendo tender k a infinito se obtiene:

$$y_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \dots \epsilon_{t-j}^2$$

Usando (1.27), (1.30) y que $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \epsilon_t(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} \\
&= z_t\left[\alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 \sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \dots \epsilon_{t-j}^2\right]^{1/2} \\
&= \epsilon_t A_{t-1}
\end{aligned}
$$

Donde $A_{t-1} = \left[\alpha_0\left(1 + \sum_{j=0}^{k} \alpha_1^{j+1} \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \dots \epsilon_{t-j}^2\right)\right]^{1/2}$.

En consecuencia, la covarianza entre y_t y y_{t+h}, está dada por:

$$
\begin{aligned}
Cov(y_t, y_{t+h}) &= E(y_t y_{t+h}) \\
&= E\left(\epsilon_{(t+h)}\epsilon_t A_{t-1} A_{t+h-1}\right) \\
&= E\left(E\left(\epsilon_{(t+h)}\epsilon_t A_{t-1} A_{t+h-1} \middle| \Psi_{t+h-1}\right)\right) \\
&= E\left(\epsilon_t A_{t-1} A_{t+h-1} E\left(\epsilon_{(t+h)} \middle| \Psi_{t+h-1}\right)\right) \\
&= 0, \qquad E\left(\epsilon_{(t+h)} \middle| \Psi_{t+h-1}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $y_t \sim RB\left(0, \sigma_y^2\right)$ con $\sigma_y^2 = {\alpha_0}/{1-\alpha_1}$. En la siguiente sección se verificará que y_t no es IID.

C. Esperanza y varianza condicional

Se describe a continuación el desarrollo de la esperanza y varianza condicional del proceso y_t.

Esperanza

$$
\begin{aligned}
E(y_t|\Psi_{t-1}) &= E\left((\epsilon_t|\Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2}\right) \\
&= E\left((\epsilon_t)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2}\right) \\
&= 0, \qquad y_t \perp y_s, s < t
\end{aligned}
$$

Varianza

$$
\begin{aligned}
V(y_t|\Psi_{t-1}) &= E\left((\epsilon_t^2|\Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)\right) \\
&= E\left((\epsilon_t^2)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)\right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

De lo anterior se puede ver que la media es cero y que la varianza no condicional es constante, contrario a lo que ocurre con la condicional a corto plazo, la cual depende de y_{t-1}. De manera que se pueden presentar procesos de alta volatilidad o calma.

D. Función de verosimilitud del proceso ARCH(1)

La estimación de los parámetros de un proceso ARCH(1) no se plantea sobre la función de verosimilitud, sino sobre la función de verosimilitud condicional, y dados los supuestos del modelo ARCH(1) este tendrá distribución condicional normal con media cero y varianza h_t.

Sea B_t la función de densidad de y_t, dada Ψ_{t-1}. B_t esta dada por:

$$B_t = f(y_t|\Psi_{t-1}) = \frac{1}{(2\pi h_t)^{1/2}} exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right)$$

La función de verosimilitud condicionada conjunta de T observaciones esta dada por:

$$L = B_1 B_2 \dots B_T = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{(2\pi h_t)^{1/2}} \; exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right)$$

Maximizar la función anterior es equivalente a maximizar el logaritmo, donde el logaritmo de la función de densidad de la t-ésima observación l_t, esta dada por:

$$l_t = \ln(B_t) = k - \frac{1}{2}\ln h_t - \frac{y_t^2}{2h_t}, \text{ con } k = ln\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$$

Sea $l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t$, si $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)'$ es el vector parámetros la función l debe ser maximizada con respecto a α. Entonces el Hessiano esta dado por:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{\partial l_t}{\partial h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha} = \frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\left[-\frac{1}{2h_t} + \frac{y_t^2}{2h_t^2}\right] = \frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right] \tag{1.31}$$

$$M = \frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\left(\frac{y_t^2}{h_t}\right) + \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left(\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right) \tag{1.32}$$

Si se tiene en cuenta que $E\left(\frac{y_t^2}{h_t}|\Psi_{t-1}\right) = 1$ y que en consecuencia

$$E\left(\left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left(\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right)|\Psi_{t-1}\right) = 0.$$

Al tomar la esperanza condicional en (1.32) obtenemos:

$$\begin{aligned} E(M|\Psi_{t-1}) &= -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'} E\left(\frac{y_t^2}{h_t}|\Psi_{t-1}\right) + E\left(\left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left(\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right)|\Psi_{t-1}\right) \\ &= -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'} \end{aligned}$$

En vista de que la matriz de información Ξ es la esperanza negativa del promedio del Hessiano sobre todas las observaciones, entonces:

$$\Xi_{\alpha\alpha} = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2T} E\left(\frac{1}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\right)$$

Y su estimador está dado por

$$\widehat{\Xi_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\right)$$

1.6.2.3 Generalización ARCH(p)

A continuación se presenta una generalización para un proceso ARCH(p), también se muestra que un proceso ARCH es un ruido blanco pero no un IID (Rodríguez, 2009).

A. Generalización de la esperanza y varianza no-condicionales

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E\left(\epsilon_t h_t^{1/2}\right) \\ &= E\left(\epsilon_t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2\right)^{1/2}\right) \\ &= E(\epsilon_t) E\left(\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2\right)^{1/2}\right) = 0, \qquad \epsilon_t \perp y_s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(y_t) &= E(y_t^2) \\
&= E\left(\epsilon_t^2\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}^2\right)\right) \\
&= E(\epsilon_t^2)E\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}^2\right) \\
&= \alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i E(y_{t-i}^2) \\
&= \alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\left(\alpha_0+\sum_{k=1}^{p}\alpha_i E(y_{t-i-k}^2)\right) \\
&= \alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\left(\alpha_i\alpha_0+\alpha_i^2\sum_{k=1}^{p}E(y_{t-i-k}^2)\right) \\
&= \alpha_0\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)^j=\frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i}, \qquad k\longrightarrow\infty
\end{aligned}
$$

B. Generalización de la esperanza y varianza condicionales

Los siguientes son los desarrollos para la esperanza y varianza condicional.

$$
E(y_t|\Psi_{t-1})=E\left((\epsilon_t|\Psi_{t-1})\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}^2\right)^{1/2}\right)=0
$$

$$
\begin{aligned}
V(y_t^2|\Psi_{t-1}) &= E\left((\epsilon_t^2|\Psi_{t-1})\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}^2\right)\right) \\
&= \alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}^2 \\
&= h_t
\end{aligned}
$$

Se concluye entonces que para un modelo ARCH(p) la varianza condicional tiene como parámetros a $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$, las otras medidas analizadas arrojan resultados constantes.

C. Estimación de parámetros

La estimación de los parámetros y de sus varianzas se hace mediante el algoritmo de Fisher-Scoring, si (Casas, Cepeda, 2008):

- $\theta^{(k)}$ es el vector de los valores de los parámetros en la k-ésima iteración del algoritmo.
- $q^{(k)}$ es el vector $q = \frac{1}{T}\sum_t \frac{\partial l_t}{\partial \theta}$ evaluado en $\theta^{(k)}$.
- $I\left(\theta^{(k)}\right)$ es el valor de la matriz de información $I(\theta)$ evaluada en $\theta^{(k)}$.

El algoritmo sería:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \left[I\left(\theta^{(k)}\right)\right]^{-1} q^{(k)}, \qquad k \geq 0$$

Si $I_{\alpha\beta} = 0$, se puede proponer un algoritmo iterado alternado de Fisher-Scoring para obtener las estimaciones máximo verosímiles de los vectores de parámetros α y β, como el propuesto en Aitkin (1987) o en Cepeda y Gamerman (2001) para modelos lineales con varianza variable. De esta manera, el algoritmo de Fisher-Scoring puede formularse a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + \left(I_{\beta\beta}^{(k)}\right)^{-1} q_{\beta}^{(k)} \quad (1.33)$$
$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \left(I_{\alpha\alpha}^{(k)}\right)^{-1} q_{\alpha}^{(k)} \quad (1.34)$$

Donde $\beta^{(k)}$ y $\alpha^{(k)}$ son los valores de los vectores β y α en la k-ésima iteración del algoritmo, con $\left(I_{\beta\beta}^{(k)}\right)^{-1}$ y $\left(I_{\alpha\alpha}^{(k)}\right)^{-1}$ son, respectivamente, las matrices inversas de $I_{\beta\beta}^{(k)}$ y $I_{\alpha\alpha}^{(k)}$ evaluadas en $\beta^{(k)}$y $\alpha^{(k)}$. Por último, $q_{\beta}^{(k)}$ y $q_{\alpha}^{(k)}$ son los vectores $q_{\beta} = \frac{1}{T}\sum_t \frac{\partial l_t}{\partial \beta}$ y $q_{\alpha} = \frac{1}{T}\sum_t \frac{\partial l_t}{\partial \alpha}$ evaluados respectivamente en $\beta^{(k)}$y $\alpha^{(k)}$.

El algoritmo para obtener las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros para la media y la varianza es:

1. Dar valores iniciales para β y α, ($\beta^{(0)}$y $\alpha^{(0)}$).
2. Estimar $I_{\beta\beta}^{(k)}$ y $q_{\beta}^{(k)}$ utilizando $\beta^{(k)}$y $\alpha^{(k)}$.
3. Calcular $\beta^{(k+1)}$ utilizando la ecuación (28).
4. Utilizando $\beta^{(k+1)}$ y $\alpha^{(k)}$, estimar $I_{\alpha\alpha}^{(k)}$ y $q_{\alpha}^{(k)}$.
5. Calcular $\alpha^{(k+1)}$ utilizando la ecuación (1.34).
6. Repita los pasos 2 a 5 hasta que se cumpla algún criterio de convergencia.

1.6.3 Modelo Autoregresivo Condicional Heterocedástico Generalizado (GARCH)

Este proceso fue presentado por Bollerlev (1986), es una generalización de los procesos ARCH. El modelo GARCH adiciona una parte autorregresiva al comportamiento de la varianza, planteado en el modelo ARCH (Rodríguez, 2009).

1.6.3.1 Proceso GARCH(p,q)

Un proceso $\{y_t\}$ obedece a una dinámica GARCH(p,q), si satisface las ecuaciones:

$$y_t = \epsilon_t \mathrm{h}_{\mathrm{t}}^{1/2},\ \epsilon_t \sim \mathrm{NID}(0,1), h_t > 0\ y\ \epsilon_t \perp y_s (s < t) \tag{1.33}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}, \tag{1.34}$$

$$h_t = \epsilon_t \omega$$

$$\epsilon_t = y_t - \mathrm{x}_t \gamma$$

$con\ p \geq 0, q \geq 0, \alpha_0 > 0,\ \alpha_j \geq 0, i = 1, \dots, q,\ \ y\ \ \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p$

Nótese que $\epsilon_t \perp y_s$ equivale a que $Cov(\epsilon_t, y_s) = 0$ para todo $(s < t)$.

$\omega' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ y $\gamma' = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)$ son vectores de parámetros para modelar la varianza y la media respectivamente. x_t es el vector de variables explicativas observadas en el tiempo t.

Dados los supuestos anteriores, la esperanza y varianza incondicional se definen como:

1. $E(y_t) = 0$
2. $V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j - \sum_{i=1}^{p} \beta_i}$

Si y_t sigue un proceso GARCH(p,q) su cuadrado, y_t^2 tiene una función de autocorrelación simple análoga a la de un proceso ARMA(p*,q), con $p* = max\{p, q\}$, parámetros autorregresivos $\phi_i = \alpha_i + \beta_i$, y parámetros de media móvil, $\theta_j = -\beta_j$, para $j = 1,2, \dots, q$. Precisamente esta similitud con los modelos ARMA hace que se utilicen técnicas de identificación para los modelos ARCH y

GARCH basadas en funciones de autocorrelación simple y parcial, del mismo modo que se hace en el análisis de tipo Box-Jenkins, pero esta vez se utiliza los cuadrados de los residuos. Sin embargo, la dependencia estadística de los procesos de varianza condicional hace que la estimación de dichas funciones sea poco eficiente (Novales, 2013).

1.6.3.2 Proceso GARCH(1,1)

Este proceso se define de acuerdo a las ecuaciones (1.33) y (1.34), para el caso de $p = q = 1$, de la siguiente manera:

$$y_t = \epsilon_t \mathrm{h}_\mathrm{t}^{1/2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{1.35}$$

con $\alpha_0, \alpha_1 > 0,\ \beta_1 \geq 0$ y $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

A. Esperanza y varianza no condicionales

A continuación, se presentan los desarrollos para esperanza y varianza no condicionales, éstos también son tomados del trabajo de Bollerslev (1986).

Caso no condicional.

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E\left(\epsilon_t(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^{1/2}\right) \\ &= E(\epsilon_t)E\left((\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^{1/2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E\left(\epsilon_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})\right) \\ &= E(\epsilon_t^2)E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2) + \beta_1 E(h_{t-1}) \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \end{aligned}$$

B. Esperanza y varianza condicional

$$
\begin{aligned}
E(y_t|\Psi_{t-1}) &= E(\epsilon_t|\Psi_{t-1})(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2+\beta_1 h_{t-1})^{1/2} \\
&= E(\epsilon_t)(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2+\beta_1 h_{t-1})^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(y_t|\Psi_{t-1}) &= E(\epsilon_t^2|\Psi_{t-1})(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2+\beta_1 h_{t-1}) \\
&= E(\epsilon_t^2)(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2+\beta_1 h_{t-1}) \\
&= h_t
\end{aligned}
$$

De nuevo se puede observar que la varianza a largo plazo es constante mientras que a corto plazo depende de h_t (Rodríguez, 2009).

C. Estimación de parámetros

Procediendo de manera similar que para el modelo ARCH y bajo la suposición de que ϵ_t sigue una distribución normal, se obtiene la expresión para la función de verosimilitud gaussiana (condicional) que se generaliza para un proceso GARCH(p,q) dada por (Monsalve, 2011):

$$
l(\theta)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(\theta)
$$

$$
l_t(\theta)=-\frac{1}{2}\ln h_t-\frac{1}{2}\epsilon_t^2 h_t^{-1}
$$

Al derivar $l_t(\theta)$ con respecto a los parámetros para la varianza, se obtienen las condiciones de primer y segundo orden para la varianza serán (Casas, Cepeda, 2008):

$$
\frac{\partial l_t}{\partial\omega}=-\frac{1}{2}h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial\omega}\left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t}-1\right)
$$

$$
\frac{\partial l_t^2}{\partial\omega}=\left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t}-1\right)\frac{\partial}{\partial\omega'}\left[\frac{1}{2}h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial\omega}\right]-\frac{1}{2}h_t^{-2}\frac{\partial h_t}{\partial\omega}\frac{\partial h_t}{\partial\omega'}\frac{\epsilon_t^2}{h_t}
$$

Donde $\frac{\partial h_t}{\partial\omega}=\epsilon_t+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\frac{\partial h_{t-i}}{\partial\omega}$

La matriz de información para los parámetros de la varianza está dada por:

$$
I_{\omega\omega}=\frac{1}{T}\sum_t E\left[\frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\omega}\frac{\partial h_t}{\partial\omega'}\right]
$$

$I_{\omega\omega}$ es estimada consistentemente por análogo muestral, que involucra únicamente las primeras derivadas.

Diferenciando la verosimilitud con respecto a los parámetros para la media, se obtienen las condiciones de primer y segundo orden para la media:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \gamma} = \frac{\epsilon_t x_t{}'}{h_t} + \frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \gamma}\left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1\right) \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial l_t^2}{\partial \gamma \partial \gamma'} = \frac{x_t x_t{}'}{h_t} - \frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \gamma}\frac{\partial h_t}{\partial \gamma'}\left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t}\right) - \frac{2\epsilon_t x_t{}'}{h_t^2}\frac{\partial l_t}{\partial \gamma'} + \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \gamma'}\left[\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \gamma}\right]$$

De igual manera para el caso de la varianza, a partir de la ecuación (1.36), se encuentra la matriz de información para los 50parámetros de la media:

$$I_{\beta\beta} = \frac{1}{T}\sum_t E\left[\frac{x_t x_t{}'}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \gamma}\frac{\partial h_t}{\partial \gamma'}\right]$$

2 Estimación de los Modelos Heterocedásticos usando R.

En este capítulo se mostrará cuáles son los procedimientos para analizar una serie de tiempo, específicamente una serie de tiempo financiera donde se presenta volatilidad. Para ello se utilizará el programa R Project. R es un lenguaje de programación de acceso libre. Actualmente es uno de los software libres más relevantes e importantes a la hora de realizar análisis de información en la cual se requiera aplicar alguna técnica estadística. A continuación, se mostrará el paso a paso, desde cómo preparar la información para ser analizada, los estadísticos descriptivos, los retornos de la serie, hasta la identificación del modelo, prueba de independencia de los rezagos y las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.

2.1 Limpiar y preparar la información.

Antes de iniciar la metodología se debe preparar la información antes de cargarla. El archivo que se cargará a R debe tener extensión ***.csv*** separado por comas. Además, el archivo debe tener una columna con el valor correspondiente, tener en cuenta con que se separan los decimales, generalmente Excel separa los decimales con comas ***(,)***.

2.2 Lectura de la información y librerías a utilizar.

Se debe cargar la información en R utilizando la función ***read.cvs().*** En en el primer comando de la función se coloca la ubicación de la base de datos, donde las carpetas deben estar separadas por **(/).** Además, en esta función se deben establecer una serie de comandos adicionales para que la lectura de información se realice de forma adecuada.

Los comandos son: ***header=TRUE***, ya que la base de datos que se cargará tiene encabezado; ***sep=";",*** por la forma en que se creó la base de datos y ***dec=",",*** en caso que los decimales estén separados por comas. Además, se muestran las librerías que se utilizaran a lo largo del análisis.

```
datos<- read.csv("C:/datos.csv",header = TRUE, sep=";", dec=",")
install.packages("PerformanceAnalytics")
install.packages("quantmod")
install.packages("car")
install.packages("FinTS")
install.packages("stats")
install.packages("forecast")
install.packages("fGarch")
install.packages("TSA")
install.packages("xtable")
library("PerformanceAnalytics")
library("quantmod")
library("car")
library("FinTS")
library("stats")
library("forecast")
library("fGarch")
library("TSA")
library("xtable")
```

2.3 Convertir la información en una serie de tiempo.

Se convierte la información en una serie de tiempo con la función ***ts().***

```
serie<- ts(datos)
head(datos)
```

La función head() permite visualizar los primeros datos de la serie de tiempo.

2.4 Estadísticas descriptivas y gráfico de la función pura.

Se calculan las estadísticas descriptivas de la serie de tiempo estudiada con la función **summary(),** esta función muestra indicadores tales como el mínimo, máximo y los cuartiles.

Además, en este paso se observa el comportamiento de la serie de tiempo utilizando la función ***plot(),*** la cual realiza un gráfico de la serie. Esta función permite insertar el nombre de la serie como título con el comando ***main=””***, ponerle un color a la serie de tiempo con el comando ***col=””***, asignarle nombre al eje horizontal y vertical con los comandos ***xlab=””*** y ***ylab=””.***

```
summary(serie)
plot(serie, main=”Serie”, col=”blue”, xlab=”Tiempo”, ylab=”Valor”)
```

2.5 Retornos de la serie de tiempo.

Se calculan los retornos de la serie de tiempo utilizando la función ***CalculateReturns()***, esta función permite realizar transformaciones a la serie de tiempo con el comando ***method=""***. La transformación que generalmente se usa en los modelos de volatilidad es la logarítmica (***log***).

Además, en este paso se observa el comportamiento de los retornos de la serie de tiempo, con la función ***plot()***. Al calcular los retornos de la serie de tiempo se pierde la información del primer dato, por lo que se debe eliminar el primer registro del objeto ***serie.ret***.

```
serie.ret<- CalculateReturns(serie, method="log")
plot(serie.ret, main="Retornos de la serie", col="blue",
xlab="Tiempo", ylab="Valor")
serie.ret<- serie.ret[-1]
```

2.6 Retornos, Retornos al cuadrado y Retornos absolutos de la serie de tiempo.

Ahora se grafican los retornos, retornos al cuadrado y retornos absolutos de la serie de tiempo, para observar si la serie presenta picos extremos. Para realizar este gráfico se deben guardar las tres clases de retornos en un objeto, utilizando la función ***cbind()***. Después, se nombran las tres clases de retornos, utilizando la función ***colnames()***.

Por último, se construye el gráfico con las tres clases de retornos utilizando la función ***plot.zoo()***. Se elige la clase de retornos que menos volatilidad tenga.

```
retornos<- cbind(serie.ret, serie.ret^2, abs(serie.ret))
colnames(retornos) <- c("Retornos", "Retornos al cuadrado", "Retornos
absolutos")
plot.zoo(retornos, main="Retornos de la serie de tiempo", col="red")
```

2.7 Prueba de independencia en los rezagos.

A continuación se debe probar si existe independencia entre los rezagos de la clase de retornos elegida en el paso anterior, utilizando la prueba Ljung-Box, por medio de la función ***box.test()***,donde el comando a utilizar es ***type="Ljung-Box"***.

Esta función permite establecer los rezagos que se usarán en la prueba, con el comando ***lag***. Además, a los retornos se les debe aplicar el comando ***coredata()***, únicamente tiene en cuenta las observaciones de los retornos.

La hipótesis nula de la prueba Ljung-Box establece que los retornos de la serie son independientes, es decir:

$$H_0\colon \ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_h = 0$$

$$H_1\colon \ Algún\, \rho_i \neq 0$$

Los retornos de la serie se distribuyen de forma independiente, por lo que, para continuar con el modelamiento se debe rechazar la hipótesis nula.

```
Box.test(coredata(serie.ret), type="Ljung-Box", lag=12)
```

2.8 Prueba de efectos ARCH.

Ahora se debe probar si es adecuado el uso de un modelo de volatilidad para los retornos de la serie de tiempo, con la función ***ArchTest().*** La hipótesis nula de esta prueba establece que no existen efectos ARCH, es decir:

$$H_0\colon \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$$

$$H_1\colon Algún\, \alpha_j \neq 0$$

por lo que, para continuar con el modelamiento se debe rechazar la hipótesis nula.

```
ArchTest(serie.ret)
```

2.9 Función de autocorrelación (FAC) y autocorrelación parcial (FACP) para el modelo ARIMA

Se grafica la FAC y FACP de la clase de retornos elegida en el paso (1.6), por medio de las funciones ***acf()***y ***pacf(),*** para definir cuáles son los posibles parámetros que tendrá el modelo ARIMA(p, q). El parámetro p, representa el orden del modelo autorregresivo (FACP) y el parámetro q, el orden del modelo de medias móviles (FAC).

Los posibles parámetros para p y q son los rezagos que se salen de las bandas.

```
par(mfrow=c(2,1))

acf(serie.ret, main="FAC de los Retornos de la serie")
pacf(serie.ret, main="FACP de los Retornos de la serie")
```

2.10 Modelos ARIMA propuestos.

Posteriormente se estiman los modelos ARIMA de los retornos de la serie de tiempo, para todas las combinaciones de los posibles parámetros, p y q, utilizando la función ***arima().*** En ésta función el comando para colocar el orden del modelo es ***order=c(p,d,q),*** donde a no ser que exista estacionalidad, ***d=0.***

```
arima101 <- arima(serie.ret, order=c(1,0,1))
arima102<- arima(serie.ret, order=c(1,0,2))
arima103 <- arima(serie.ret, order=c(1,0,3))
```

2.11 Selección del modelo ARIMA.

Por medio del criterio AKAIKE (AIC) se establece el mejor modelo ARIMA, usando ***$aic*** en cada modelo estimado.

Para poder establecer cuál es el mejor modelo se utiliza el Criterio de Información de Akaike (AIC) definido como (Monsalve, 2011):

$$AIC = -2\ln(verosimilitud) + 2(nro\ de\ parámetros) \qquad (2.1)$$

La verosimilitud es evaluada en los valores estimados por el método de máxima verosimilitud. El primer término de la ecuación (2.1) mide la bondad del ajuste del modelo autorregresivo para los datos, mientras que el segundo término se le conoce con el nombre de función de penalización del criterio puesto que este penaliza un modelo candidato por el número de parámetros usado. Para seleccionar el mejor modelo, se calcula el $AIC(k)$ para $k = 0, \dots, P$, donde P es un entero positivo, y se selecciona el orden k con aquel con menor valor de AIC.

Se contruye una tabla con los AIC's, con el fin de seleccionar el modelo con menor AIC, el cual será el modelo ARIMA seleccionado.

```
aic101 <- arima101$aic
aic102 <- arima102$aic
aic103 <- arima103$aic
nombres<- c("aic101","aic102","aic103")
aic<- as.numeric(c(aic101,aic102,aic103))
table<- data.frame(nombre,aic)
```

2.12 Función de autocorrelación (FAC) y autocorrelación parcial (FACP) para el modelo ARCH/GARCH

Con los residuos al cuadrado del modelo ARIMA seleccionado, se construyen la FAC y FACP para determinar los posibles parámetros, p y q, que tendrán los modelos ARCH/GARCH propuestos.

```
res_arima101 <- arima101$res
res_arima101_2 <- arima101$res^2
par(mfcol=c(3, 1))
plot(res_arima101_2,main='Residuales al cuadrado del modelo ARIMA')
acf(res_arima101_2,main='FAC       de       los       residuales       al
cuadrado',lag.max=50)
pacf(res_arima101_2,main='     FAC     de     los     residuales     al
cuadrado',lag.max=50)
```

2.13 Modelos ARCH/GARCH propuestos.

En el doceavo paso, se estiman los modelos ARCH/GARCH de los residuales del modelo ARIMA seleccionado, para todas las combinaciones de los posibles parámetros, p y q. Para el modelo ARCH se estiman modelos de los posibles parámetros q, con la función ***garch()***, estableciendo el comando ***order=c(0,q).*** Para el modelo GARCH, se estiman modelos GARCH de todas las combinaciones de los posibles, p y q, utilizando la función ***garch()***, estableciendo el comando ***order=c(p,q).***

```
arch01=garch(res.arima101,order=c(0,1),trace=F)
arch02=garch(res.arima101,order=c(0,2),trace=F)
garch11=garch(res.arima101,order=c(1,1),trace=F)
```

2.14 Selección del modelo ARCH/GARCH

Por medio del criterio AKAIKE (AIC) se establece el mejor modelo ARCH/GARCH, usando ***$aic***en cada modelo estimado, tanto ARCH como GARCH. El modelo con menor AIC es el modelo ARCH/GARCH seleccionado.

```
aicarch01=AIC(arch01)
aicarch02=AIC(arch02)
aicgarch11=AIC(garch11)
nombres2<- c("aicarch01","aicarch02","aicgarch11")
aic2 <- as.numeric(c(aicarch01,aicarch02,aicgarch11))
table<- data.frame(nombre2,aic2)
```

2.15 Modelo ARCH/GARCH seleccionado.

Ahora se muestran las estimaciones del modelo ARCH/GARCH seleccionado y algunas pruebas de diagnóstico, como la prueba JarqueBera para establecer si existe normalidad y la prueba Ljung-Box si existe independencia.

```
summary(garch11)
```

2.16 Grafico del modelo ARIMA y GARCH

Se construye el grafico de los valores reales, estimaciones del modelo ARIMA seleccionado y los intervalos de confianza creados en base al modelo ARCH/GARCH seleccionado.

```
ht.arch11=garch11$fit[,1]^2
estimaciones_arima101=fitted.values(arima101)
inf_garch11= estimaciones_arima101-1.96*sqrt(ht.arch11)
sup_garch11= estimaciones_arima101+1.96*sqrt(ht.arch11)
plot(serie.ret, main = “Grafico de los retornos de la serie con los
intervalos de confianza del modelo Garch”, type = "l")
lines(inf_garch11,col='red')
lines(sup_garch11,col='blue')
lines(estimaciones_arima101,col='green')
```

3 Aplicación a una serie de tiempo financiera usando el software R.

La variable escogida para el modelamiento mediante la metodología GARCH fue la serie que contiene los valores de la acción de la entidad **Bancolombia**, desde la fecha comprendida entre el 2 de enero de 2006 hasta el día 6 de junio de 2016. Bancolombia es un grupo financiero colombiano con 140 años de funcionamiento. Actualmente es una entidad bien consolidada que se ha extendido a nivel internacional y por lo tanto se ha presentado, como se verá más adelante, un alza considerable en el precio de sus acciones.

3.1 Análisis Inicial.

Para realizar el análisis de la serie seleccionada primero se deben cargar las librerías enunciadas en el numeral 2.2.

Al cargar la base de datos se puede observar una pequeña parte de la base, en la cual se muestra que los datos se tienen valores diarios desde el mes de enero del año 2006. Además el máximo valor de la variable Bancolombia es 30780, el mínimo 9730 y la media 23880.

```
Bancolombia <- read.csv("Bancolombia.csv",header =TRUE,
sep=";", dec=",") head(Bancolombia)
```

```
##    dd.mm.aa Valor
## 1 02/01/2006 15020
## 2 03/01/2006 15500
## 3 04/01/2006 15680
## 4 05/01/2006 15720
## 5 06/01/2006 16000
## 6 10/01/2006 16380
```

```
Bancolombia <- Bancolombia[,-1]
Bancolombia <- ts(Bancolombia)
summary(Bancolombia)
```

```
## Min.  1st Qu. Median   Mean 3rd Qu.   Max.
## 9730    16600  23880  22340   27320  30780
```

En una aproximación inicial se realiza la inspección visual de la serie en términos de tendencia para determinar la estacionariedad o no de la serie, además de posibles cambios de explosión y calma en el tiempo, para ello se realiza una gráfica de los datos sin transformaciones.

En la figura 3.1, se puede observar que son datos que tienen una cambios a través del tiempo y existen épocas dónde crece o decrece durante periodos de tiempo prolongados, por ejemplo entre las observaciones 500 y 1000 se puede ver un crecimiento notable del valor de la acción, lo cual muestra claramente no no hay estacionariedad en la serie.

```r
#Grafico serie pura
plot(Bancolombia,main="Bancolombia")
```

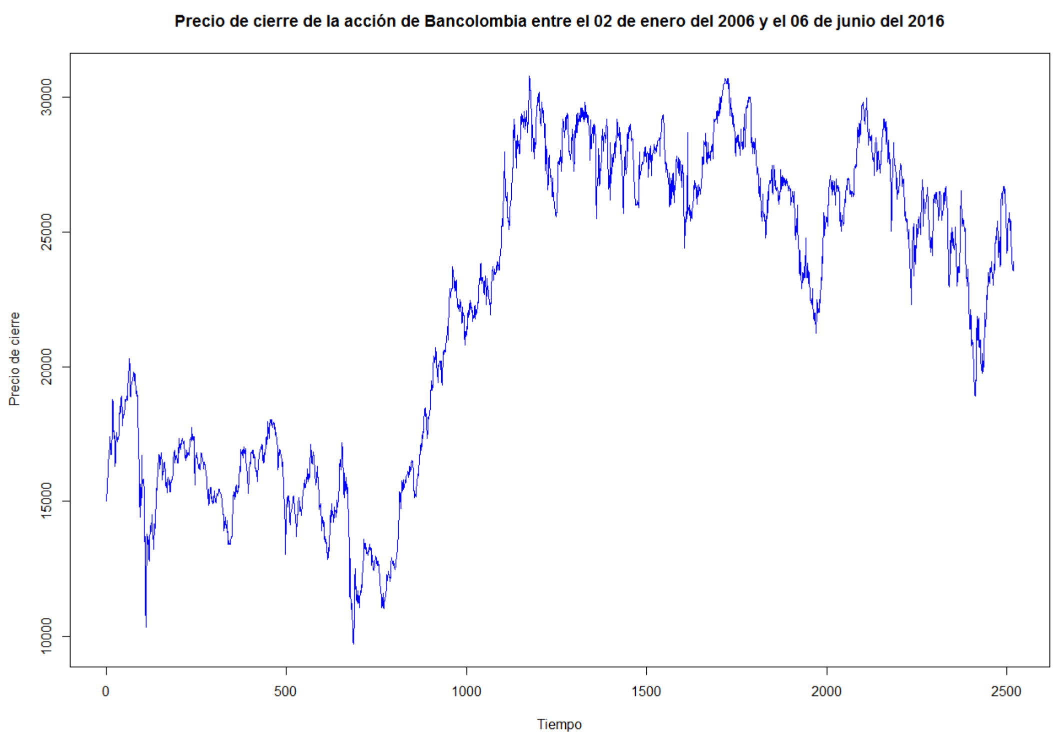

Figura 3.1 Precio de cierre de la acción de Bancolombia entre el 02/01/2006 y el 06/06/2016

Con el fin de realizar una medición de la volatilidad (medida a través de la varianza condicional de la serie subyacente), específicamente en series de tiempo financieras, se modela la volatilidad de los retornos. En la figura 3.2 siguiente se presenta una alta volatilidad si se compara con el tiempo inmediatamente anterior. Por ende, el modelamiento a través de algunos modelos de la familia ARCH serían ideales para modelar los datos.

```
#Logretornos
Bancolombia.ret<CalculateReturns(Bancolombia,method=log")
plot(Bancolombia.ret)
```

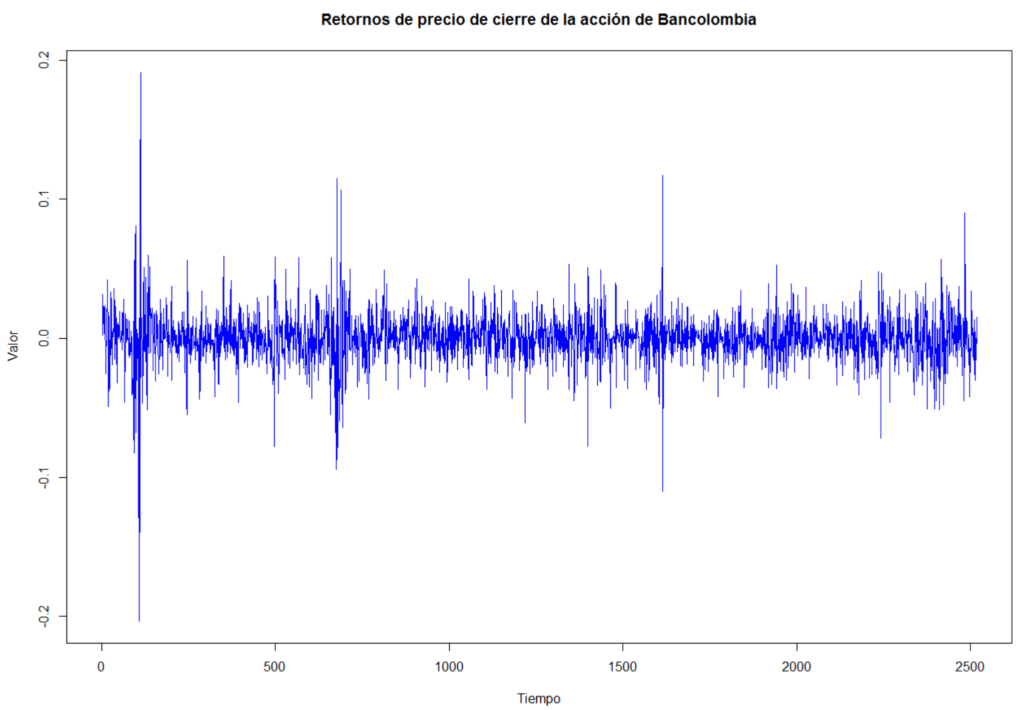

Figura 3.2 Retornos. Bancolombia

```
Bancolombia.ret<-
na.omit(Bancolombia.ret)
head(Bancolombia.ret)
```

```
## [1] 0.031457378 0.011545991 0.002547772 0.017654935 0.023472356
0.021739987
```

En el gráfico anterior se aprecia periodos de calma seguidos de periodos de explosión de la serie lo cual es un indicio de volatilidad de la serie.

3.2 Gráfico de los retornos al cuadrado y retornos absolutos.

Con el fin de realizar una exploración de los datos, se puede ver si la serie presenta valores altos y se pueden observar en los retornos al cuadrado y en el valor absoluto de los retornos, ya que podrían presentar problemas para la estimación del modelo.

```
dataToPlot = cbind(Bancolombia.ret, Bancolombia.ret^2,
abs(Bancolombia.ret))
colnames(dataToPlot)
=c("Returns","Returns^2","abs(Returns)")
plot.zoo(dataToPlot,main="MSFT Daily Returns",col="blue")
```

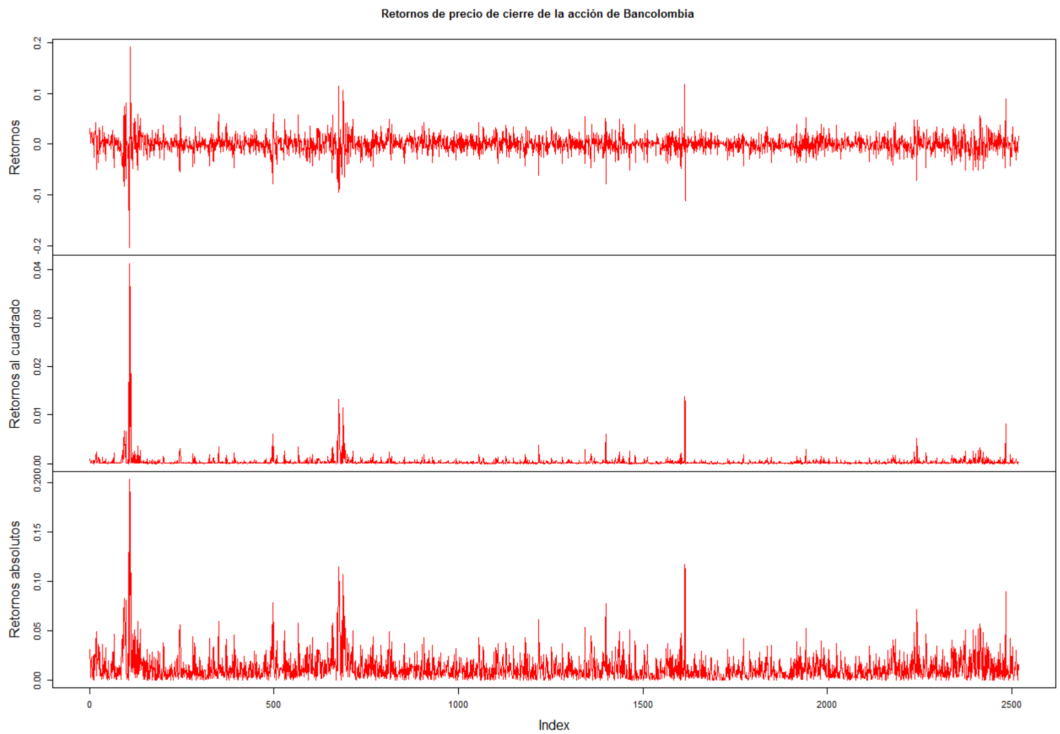

Figura 3.3 Retornos, retornos al cuadrado y valor absoluto del precio de cierre de Bancolombia.

En la figura 3.3 se evidencia entre el intervalo de tiempo 0 y 250 variaciones considerables y parte del intervalo 600-700 también muestra altas variaciones de la acción. Mientras que la parte final de la variable, no presenta volatilidad, no es tan explosiva y es medianamente "normal". Lo cual se comprobará más adelante con pruebas sobre la volatilidad. En la construcción de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial se utilizarán los retornos al cuadrado.

3.3 Prueba de independencia en los rezagos.

Un paso importante a realizar antes de la estimación del modelo es realizar la **prueba de Ljung-Box,** dicha prueba permite observar si hay independencia entre los rezagos, en dónde lo ideal es rechazar la hipótesis nula de independencia y probar así que un modelo de la familia ARCH sería útil.

H_0: Existe independencia entre los rezagos.

H_1: No existe independencia entre los rezagos.

```
#Prueba de independencia en los rezagos
library(stats)
Box.test(coredata(Bancolombia.ret^2),type="Ljung-Box",lag =12)
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  coredata(Bancolombia.ret^2)
## X-squared = 951.01, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

Como el P valor es 2.2e-16 de la prueba Ljung-Box para los retornos al cuadrado es menor a 0.05. Hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5%, por lo que, los retornos al cuadrado del precio de cierre de la acción de Bancolombia no son independientes, por lo tanto se puede continuar con el análisis de la serie.

3.4 Prueba para saber si hay efectos que se pueden modelar con un ARCH.

Adicional a la prueba de independencia, se debe realizar otra prueba para establecer si los retornos de precio de cierre de la acción de Bancolombia son capaces de ajustarse a un modelo ARCH/GARCH. Esta prueba se aplicará sobre los retornos de la serie.

H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p$ (No hay efectos ARCH)

```
ArchTest(Bancolombia.ret)
```

```
##
##  ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
##
## data:  Bancolombia.ret
## Chi-squared = 582.21, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

Como el valor P (2.2e-16) de la prueba para los retornos es menor a 0.05. Existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5%, por lo que, los retornos de del precio de cierre de la acción de Bancolombia tiene efectos ARCH/GARCH. Entonces, se puede continuar con el análisis de la serie.

3.5 Función de autocorrelación y autocorrelación parcial para el modelo ARIMA.

Con el fin de estimar un modelo GARCH, se estima un modelo ARIMA(p,q), aquí p representa el orden del modelo autoregresivo, el cual se determina con la función de autocorrelación parcial (FACP) y q el orden del modelo de medias móviles, el cual se determina con la función de autocorrelación (FAC).

```
#install.packages
("forecast")
library(forecast)

par(mfrow=c(2,1))
acf(Bancolombia.ret^2,main="Bancolombia Returns^2")
pacf(Bancolombia.ret^2,main="Bancolombia Returns^2")
```

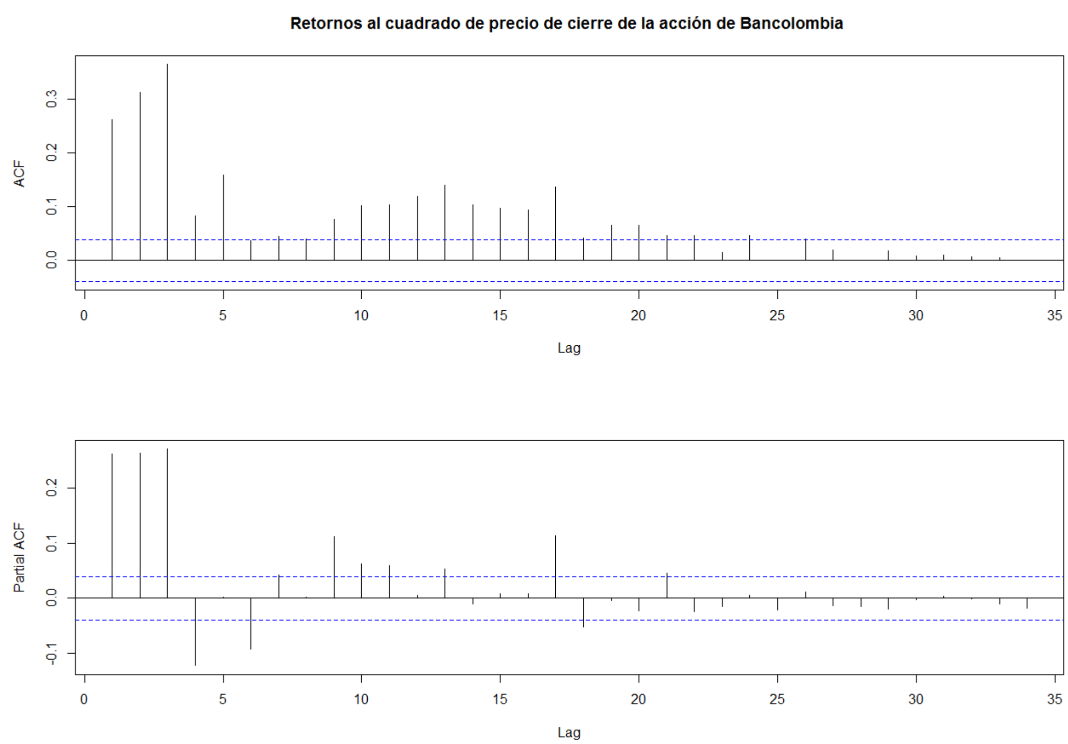

Figura 3.4 Retornos al cuadrado del precio de cierre de la acción de Bancolombia.

Así, las gráficas muestran que en la FAC se pueden observar 5 valores para el orden de q que son 1, 2, 3 ,4 y 5, mientras que en la FACP se puede observar que los 4 primeros y el 6 de los rezagos se salen de las bandas.

3.6 Proponer y escoger el modelo ARIMA adecuado.

Para determinar si la serie es estacionaria se aplicará la prueba de Dickey – Fuller, la cual utiliza el comando en R adf.test(Bancolombia.ret^2). Esta prueba tiene como hipótesis nula:

$$H_0: la\ serie\ no\ es\ estacionaria, es\ decir\ tiene\ raices\ unitarias$$

$$H_1: la\ serie\ es\ estacionaria, es\ decir\ no\ tiene\ raices\ unitarias$$

Para la serie en estudio el resultado fue el siguiente:

```
AugmentedDickey-Fuller Test
data:  Bancolombia.ret^2
Dickey-Fuller = -9.5791, Lagorder = 13, p-value = 0.01
alternativehypothesis: stationary
```

Como el valor P (0.01) de la prueba para los retornos es menor a 0.05. Existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5%, por lo que, los retornos al cuadrado de del precio de cierre de la acción de Bancolombia no tiene raíz unitaria, por lo cual se propondrán modelos ARMA, dado que no es necesario aplicar el operador diferencia.

Se estiman los modelos ARIMA para todas las combinaciones de los posibles parámetros, p y q. Para elegir el mejor modelo ARIMA para los retornos del precio de cierre de la acción de Bancolombia, se tiene en cuenta el criterio de Akaike (AIC), dónde el modelo con el menor AIC representa el mejor modelo.

```
arima101=arima(Bancolombia.ret,order=c(1,0,1))
aic101=arima101$aic

arima102=arima(Bancolombia.ret,order=c(1,0,2))
aic102=arima102$aic

arima103=arima(Bancolombia.ret,order=c(1,0,3))
aic103=arima103$aic

arima104=arima(Bancolombia.ret,order=c(1,0,4))
aic104=arima104$aic

arima105=arima(Bancolombia.ret,order=c(1,0,5))
aic105=arima105$aic
```

```
arima201=arima(Bancolombia.ret,order=c(2,0,1))
aic201=arima201$aic
arima202=arima(Bancolombia.ret,order=c(2,0,2))
aic202=arima202$aic

arima203=arima(Bancolombia.ret,order=c(2,0,3))
aic203=arima203$aic

arima204=arima(Bancolombia.ret,order=c(2,0,4))
aic204=arima204$aic

arima205=arima(Bancolombia.ret,order=c(2,0,5))
aic205=arima205$aic

arima301=arima(Bancolombia.ret,order=c(3,0,1))
aic301=arima301$aic

arima302=arima(Bancolombia.ret,order=c(3,0,2))
aic302=arima302$aic

arima303=arima(Bancolombia.ret,order=c(3,0,3))
aic303=arima303$aic

arima304=arima(Bancolombia.ret,order=c(3,0,4))
aic304=arima304$aic

arima305=arima(Bancolombia.ret,order=c(3,0,5))
aic305=arima305$aic

arima401=arima(Bancolombia.ret,order=c(4,0,1))
aic401=arima401$aic

arima402=arima(Bancolombia.ret,order=c(4,0,2))
aic402=arima402$aic

arima403=arima(Bancolombia.ret,order=c(4,0,3))
aic403=arima403$aic

arima404=arima(Bancolombia.ret,order=c(4,0,4))
aic404=arima404$aic

arima405=arima(Bancolombia.ret,order=c(4,0,5))
aic405=arima405$aic

arima601=arima(Bancolombia.ret,order=c(6,0,1))
aic601=arima601$aic

arima602=arima(Bancolombia.ret,order=c(6,0,2))
aic602=arima602$aic

arima603=arima(Bancolombia.ret,order=c(6,0,3))
aic603=arima603$aic

arima604=arima(Bancolombia.ret,order=c(6,0,4))
aic604=arima604$aic
```

```
arima605=arima(Bancolombia.ret,order=c(6,0,5))
aic605=arima605$aic


nombres=c("arima101","arima102","arima103","arima104","arima105",
"arima201","arima202","arima203","arima204","arima205",
"arima301","arima302","arima303","arima304","arima305",
"arima401","arima402","arima403","arima404","arima405",
"arima601","arima602","arima603", "arima604","arima605")


aic=c( aic101 , aic102 , aic103 , aic104 , aic105 , aic201 ,
aic202 , aic203 , aic204 , aic205 , aic301 , aic302 , aic303 ,
aic304 , aic305 , aic401 , aic402 , aic403 , aic404 , aic405,
aic601, aic602,aic603,aic604,aic605 )

tabla=cbind(nombres,round(aic,3))


print(xtable(tabla))
```

ARMA	AIC
arima405	-12899,11
arima605	-12895,87
arima604	-12893,71
arima301	-12889,93
arima103	-12889,84
arima101	-12889,68
arima102	-12889,56
arima201	-12889,52
arima302	-12889,31
arima401	-12887,91
arima404	-12887,90
arima203	-12887,83
arima104	-12887,77
arima202	-12887,54
arima303	-12887,49
arima105	-12886,18
arima305	-12886,14
arima402	-12885,97
arima204	-12885,88
arima304	-12885,59
arima403	-12885,58
arima601	-12884,59
arima205	-12884,05
arima602	-12882,45
arima603	-12880,55

El mejor modelo es el ARIMA(4,0,5), ya que, tiene el menor AIC (-12899.11).

```
Summary(arima405)

arima(x = Bancolombia.ret, order = c(4, 0, 5))

Coefficients:
          ar1       ar2      ar3      ar4      ma1      ma2       ma3
ma4
      -0.1371   -0.0241   0.2087   0.9360   0.1239   0.0436   -0.2289   -
0.9441
s.e.    0.0598    0.0500   0.0485   0.0574   0.0638   0.0557    0.0541
0.0646
         ma5  intercept
      0.0057      2e-04
s.e.  0.0218      1e-04

sigma^2 estimated as 0.0003453:  log likelihood = 6459.59,  aic = -
12899.18
```

3.7 Función de autocorrelación y Función de autocorrelación parcial para el modelo ARCH/GARCH.

Con los residuales al cuadrado del modelo ARIMA(4,0,5) se construye el modelo ARCH/GARCH, así con el mismo procedimiento que se hizo para el modelo ARIMA. Las gráficas de las FAC y FACP para los residuales al cuadrado del modelo ARIMA(4,0,5) son:

```
res.arima405=arima405$res
Residuales.arima405=res.arima405^2
par(mfcol=c(3,1))
plot(Residuales.arima405,main='Residuales al cuadrado del modelo
ARIMA(4,0,5)')
acf.squared405=acf(Residuales.arima405,main='ACF',lag.max=50)
pacf.squared405=pacf(Residuales.arima405,main='PACF',lag.max=50)
```

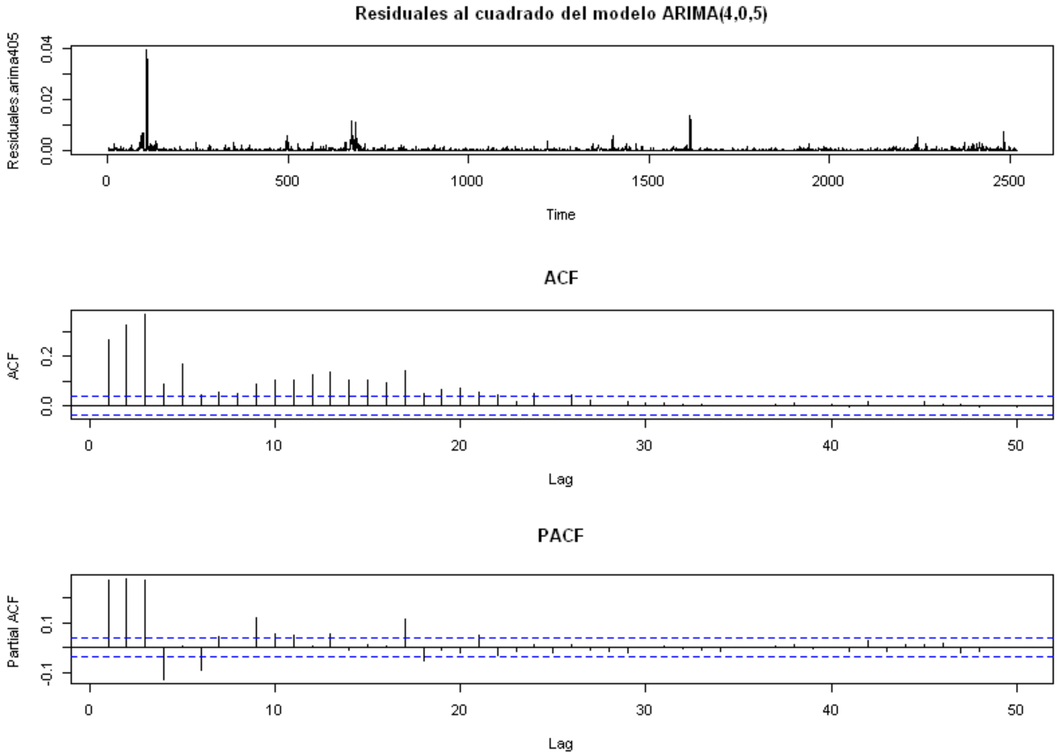

Figura 3.5 Residuales al cuadrado del modelo ARIMA(4,0,5)

Las gráficas muestran que en la FAC se pueden observar 5 valores para el orden de q que son 1,2, 3, 4 y 5, mientras que en la FACP se puede observar que los 1, 2, 3, 4, 6 primeros rezagos se salen de las bandas.

3.8 Propuesta de los modelos ARCH/GARCH.

Utilizando los residuales del modelo ARIMA(4,0,5), se estiman los modelos ARCH para los posibles parámetros q. Además, los modelos GARCH se estiman para todas las combinaciones de los posibles parámetros, p y q. Los posibles ordenes para el modelo ARCH serían 1, 2, 3, 4 y 6 para el orden ***p,*** y para el modelo GARCH serían 1, 2, 3, 4 y 6 para el orden ***p*** y 1, 2, 3, 4, 5 para el orden ***q***.

Para el modelo ARCH(p), se tienen los siguientes modelos:

```
#install.package
s("fGarch")
library(fGarch)
```

```
#install.pack
ages("TSA")
library(TSA)

arch01=garch(res.arima405,order=c(0,1),trace=F)
aicarch01=AIC(arch01)
arch02=garch(res.arima405,order=c(0,2),trace=F)
aicarch02=AIC(arch02)
arch03=garch(res.arima405,order=c(0,3),trace=F)
aicarch03=AIC(arch03)
arch04=garch(res.arima405,order=c(0,4),trace=F)
aicarch04=AIC(arch04)
arch06=garch(res.arima405,order=c(0,6),trace=F)
aicarch06=AIC(arch06)

nombres_arch=c("arch01","arch02","arch03","arch04","arch06")
aic_arch=c(aicarch01,aicarch02,aicarch03,aicarch04,aicarch06)
tabla=cbind(nombres_arch,aic_arch)
print(xtable(tabla))
```

ARCH	AIC
arch06	-13532,80
arch04	-13528,29
arch03	-13526,10
arch02	-13497,13
arch01	-13305,82

Se puede observar que el modelo que con menor valor en el criterio de Akaike fue el modelo **ARCH(6)** con -13532.80.

Para el modelo GARCH(p,q), se tienen los siguientes modelos.

```
garch11=garch(res.arima405,order=c(1,1),trace=F)
aicarch11=AIC(garch11)

garch12=garch(res.arima405,order=c(1,2),trace=F)
aicarch12=AIC(garch12)

garch13=garch(res.arima405,order=c(1,3),trace=F)
aicarch13=AIC(garch13)

garch14=garch(res.arima405,order=c(1,4),trace=F)
aicarch14=AIC(garch14)

garch15=garch(res.arima405,order=c(1,5),trace=F)
aicarch15=AIC(garch15)

garch16=garch(res.arima405,order=c(1,6),trace=F)
aicarch16=AIC(garch16)

garch21=garch(res.arima405,order=c(2,1),trace=F)
aicarch21=AIC(garch21)

garch22=garch(res.arima405,order=c(2,2),trace=F)
aicarch22=AIC(garch22)

garch23=garch(res.arima405,order=c(2,3),trace=F)
```

```
aicarch23=AIC(garch23)

garch24=garch(res.arima405,order=c(2,4),trace=F)
aicarch24=AIC(garch24)

garch25=garch(res.arima405,order=c(2,5),trace=F)
aicarch25=AIC(garch25)

garch26=garch(res.arima405,order=c(2,6),trace=F)
aicarch26=AIC(garch26)

garch31=garch(res.arima405,order=c(3,1),trace=F)
aicarch31=AIC(garch31)

garch32=garch(res.arima405,order=c(3,2),trace=F)
aicarch32=AIC(garch32)

garch33=garch(res.arima405,order=c(3,3),trace=F)
aicarch33=AIC(garch33)

garch34=garch(res.arima405,order=c(3,4),trace=F)
aicarch34=AIC(garch34)

garch35=garch(res.arima405,order=c(3,5),trace=F)
aicarch35=AIC(garch35)

garch36=garch(res.arima405,order=c(3,6),trace=F)
aicarch36=AIC(garch36)

garch41=garch(res.arima405,order=c(4,1),trace=F)
aicarch41=AIC(garch41)

garch42=garch(res.arima405,order=c(4,2),trace=F)
aicarch42=AIC(garch42)

garch43=garch(res.arima405,order=c(4,3),trace=F)
aicarch43=AIC(garch43)

garch44=garch(res.arima405,order=c(4,4),trace=F)
aicarch44=AIC(garch44)

garch45=garch(res.arima405,order=c(4,5),trace=F)
aicarch45=AIC(garch45)

garch46=garch(res.arima405,order=c(4,6),trace=F)
aicarch46=AIC(garch46)

garch61=garch(res.arima405,order=c(6,1),trace=F)
aicarch61=AIC(garch61)

garch62=garch(res.arima405,order=c(6,2),trace=F)
aicarch62=AIC(garch62)

garch63=garch(res.arima405,order=c(6,3),trace=F)
aicarch63=AIC(garch63)

garch64=garch(res.arima405,order=c(6,4),trace=F)
aicarch64=AIC(garch64)

garch65=garch(res.arima405,order=c(6,5),trace=F)
aicarch65=AIC(garch65)


nombres2=c("garch11","garch12","garch13","garch14","garch15","garch16"
, "garch21","garch22","garch23","garch24","garch25","garch26",
"garch31","garch32","garch33","garch34","garch35","garch36",
"garch41","garch42","garch43","garch44","garch45","garch46",
           "garch61","garch62","garch63","garch64","garch65")
```

```
aic2=c( aicarch11 , aicarch12 , aicarch13 , aicarch14 , aicarch15 ,
aicarch16 , aicarch21 , aicarch22 , aicarch23 , aicarch24 ,
aicarch25 , aicarch26 , aicarch31 , aicarch32 , aicarch33 ,
aicarch34 , aicarch35 , aicarch36 , aicarch41 , aicarch42 ,
aicarch43 , aicarch44 , aicarch45 , aicarch46, aicarch61 ,
aicarch62 , aicarch63 , aicarch64 , aicarch65)
tabla2=cbind(nombres2,aic2)
print(xtable(tabla2))
```

GARCH	AIC
garch11	-13620,20
garch21	-13617,24
garch31	-13616,65
garch22	-13614,33
garch32	-13612,81
garch41	-13609,33
garch12	-13607,81
garch42	-13605,52
garch43	-13604,95
garch33	-13601,94
garch44	-13601,20
garch13	-13597,73
garch23	-13596,91
garch63	-13595,17
garch35	-13594,45
garch34	-13593,56
garch45	-13593,48
garch64	-13593,13
garch65	-13589,23
garch62	-13587,63
garch61	-13584,41
garch46	-13584,35
garch14	-13581,78
garch36	-13581,67
garch26	-13580,65
garch16	-13562,91
garch25	-13562,29
garch24	-13546,19
garch15	-13515,66

En la tabla anterior se observa que el modelo que menor valor en criterio de Akaike fue el modelo **GARCH(1,1)** con -13620,20.

3.9 Modelo elegido.

Dado el menor valor del criterio de Akaike, que corresponde al modelo **GARCH(1,1)** se presentan a continuación sus parámetros.

```
summary(garch11)

Call:
garch(x = res.arima405, order = c(1, 1), trace = F)

Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.92909 -0.54281  0.02107  0.56133  6.55045

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 2.537e-05   2.240e-06    11.32   <2e-16 ***
a1 1.498e-01   1.229e-02    12.19   <2e-16 ***
b1 7.680e-01   1.358e-02    56.56   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Diagnostic Tests:
        Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 511.88, df = 2, p-value < 2.2e-16


        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 4.1413, df = 1, p-value = 0.04185
```

3.10 Gráfica modelo GARCH de los retornos de Precio de cierre de la acción de Bancolombia.

Finalmente, en esta gráfica se puede observar que las estimaciones son muy cercanas a los valores reales, sin embargo, la serie real es mucho menos volátil lo cual indica que faltaría un ajuste al modelo para que las estimaciones y el intervalo sean más preciso.

```
ht.garch11=garch11$fit[,1]^2#use 1st
column of fit
fit=fitted.values(arima405)
low=fit-1.96*sqrt(ht.garch11)
high=fit+1.96*sqrt(ht.garch11)
plot(Bancolombia.ret, main='Retornos de precio de cierre de la
acción de Bancolombia del modelo GARCH(1,1)', type="l")
lines(low,col='blue')
lines(high,col='red')
lines(fit,col='green')
```

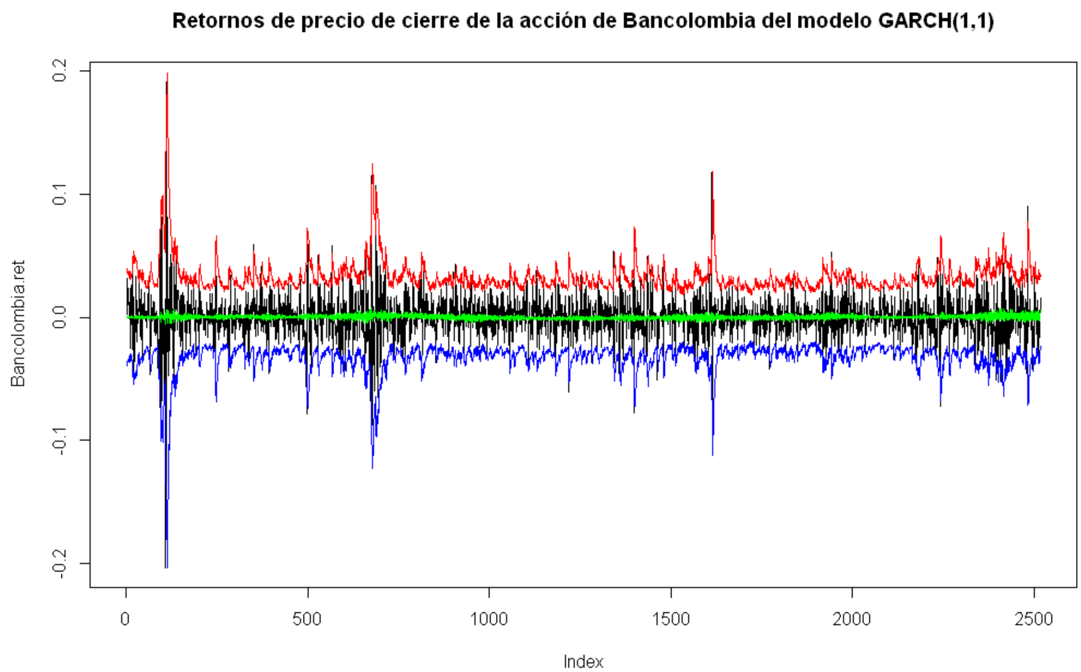

Figura 3.6 Gráfico de los retornos de precio de cierre de la acción de Bancolombia con los intervalos de confianza del modelo GARCH(1,1)

Nota:
*Línea verde: Estimaciones

*Línea negra: Valores reales

*Línea azul: Límite inferior (nivel de confianza del 0.05)

*Línea roja: Límite superior (nivel de confianza del 0.05)

3.11 Modelo Final.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, el resultado de la modelación es la siguiente:

ARMA(4,0,5)

$$
\begin{aligned}
&Bancolombia.ret_t \\
&\qquad = 0.0002 - 0.1371Bancolombia.ret_{t-1} \\
&\qquad - 0.024Bancolombia.ret_{t-2} \\
&\qquad + 0.2088Bancolombia.ret_{t-3} \\
&\qquad + 0.9360Bancolombia.ret_{t-4} + \epsilon_t + 0.1239\epsilon_{t-1} \\
&\qquad + 0.0436\epsilon_{t-2} - 0.2289\epsilon_{t-3} - 0.9441\epsilon_{t-4} \\
&\qquad + 0.0057\epsilon_{t-5}
\end{aligned}
$$

GARCH (1,1)

$$h_t = 0.000025 + 0.1498Bancolombia.ret_{t-1}^2 + 0.768\epsilon_{t-1}^2$$

BIBLIOGRAFÍA

Casas, M., Cepeda, E. (2008). Modélos ARCH, GARCH y EGARCH: Aplicaciones a series financieras, Cuadernos de economía, vol. XXXVII, n. 48, 287-319.

Cryer. J., Chan. K. (2012). Time series analysis with applications in R. Springer.

Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. Econometrica, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1008.

Engle, R. (2001). GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. The journal of economic perpectives, Vol. 15, No. 4, pp. 157-168.

González, M. P. (2009). Análisis de series temporales: Modélos ARIMA, Sarriko-O, Universidad del país Vasco.

Gujarati, D., Porter, D.. (2010). Econometría, Mc Graw Hill.

Monsalve, A. E. (2011). Tests de bondad de ajuste para modelos de tipos de interés: Un enfoque basado en procesos empíricos. Universidad de Santiago de Compostela, España.

Novales, A. (1993). Econometría. Mc Graw Hill.

Novales, A. (2013). Modelos ARCH univariantes y multivariantes. Universidad Complutense.

Peña, D. (2005). Análisis de series temporales. Alianza Editorial.

Perez, C. (2006). Econometría de las series temporales. Prentice Hall.

Rodríguez, H. Y. (2009). Profundización teórica de modelos de volatilidad ARCH-GARCH y una aplicación al caso colombiano. Comunicaciones en Estadística, vol. 2, No. 1.

Rodríguez, H. Y. (2016). Notas de clase. Univesidad Santo Tomás. Bogotá, Colombia.

Rodríguez, J. G. (2001). Una introducción a los modelos de series temporales no lineales. Universidad Rey Juan Carlos. Campus de Vicálvaro. Madrid.

Tsay, R. S. (2002). Analisys of Financial Time Series. New York: John Wiley &Sons Inc.

Vilariño, A. (2001). Turbulencias Financieras y Riesgos de Mercado. Prentice Hall.

Villavicencio, J. (2014). Introducción a series de tiempo. Instituto de estadísticas de Puerto Rico.