Actividad formativa de Doctorado: La desigualdad riemanniana de Penrose y el flujo inverso de la curvatura media

1. Motivación y objetivo del curso

En 1973, Penrose [4] propuso una sorprendente desigualdad geométrica, con el objetivo de testear (de hecho, *refutar*) el punto de vista establecido sobre la teoría de agujeros negros. Dicha desigualdad expresaba una inesperada conexión entre ciertos elementos geométricos sin relación aparente alguna dentro de una clase de variedades lorentzianas (y riemannianas).

En pocas palabras, la desigualdad afirma que la *masa ADM* del espaciotiempo bajo consideración, calculada a partir de ciertas integrales que involucran la curvatura de superficies asintóticas, debería de ser mayor o igual que la masa de cualquier agujero negro que contuviera dicho espacio-tiempo, calculada a partir de su área. Para una clase particular de espacio-tiempos, este enunciado se reduce a la *desigualdad riemanniana de Penrose*, una desigualdad sobre variedades de Riemann clásicas. Concretamente, la siguiente: *la masa ADM, m, y el área, A, de la superficia mínima más exterior en una 3-variedad asintóticamente llana y de curvatura escalar no-negativa, satisfacen la desigualdad:*

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}},$$

y, además, se la la igualdad si, y sólo si, la 3-variedad es isométrica a la hoja espacial canónica del espaciotiempo de Schwarzschild.

La demostración de la desigualdad de Riemann-Penrose por parte de Huisken e Ilmanen al final del pasado siglo (véase [2]) representó un hito importante tanto en Relatividad Matemática como en Geometría Diferencial. Para la primera, tal desigualdad puede verse como el mejor test de consistencia para la teoría de agujeros negros, dado la dificultad experimental en observar evidencias directas sobre éstos. Para la Geometría Diferencial, la demostración puso de manifiesto cuán poderoso y versátil es el llamado *flujo inverso de la curvatura media*, incluyendo la formulación débil de sus soluciones, la cual permite a las superficies del flujo “saltar”más allá de las singularidades. De hecho, este flujo fue usado poco después por Bray y Neves para calcular el invariante de Yamabe del espacio proyectivo real de dimensión 3 (véase[1]).

El propósito de este curso es el de estudiar en detalle la demostración de Huisken e Ilmanen, proporcionando previamente una perspectiva de las motivaciones físicas y de las herramientas acerca de flujos geométricos que son necesarias para su comprensión.

2. Estructura

- Profesorado: Francisco Martín Serrano y Miguel Sánchez Caja.
- Duración: 30 horas a lo largo de 10 semanas del primer cuatrimestre, en sesiones de 1 hora y media a la semana.
- Lugar y horario: Seminario 1 de IEMath-Granada. Jueves de 11:00 a 13:00, **comenzando el 5 de octubre de 2017.**
- Contenidos
  1. El marco físico del problema.
  2. Formulación débil de las soluciones del flujo inverso por la curvatura media.
  3. La fórmula de monotoní de Geroch
  4. Soluciones débiles de Huisken-Ilmanen.
  5. El ejemplo de Schwarzschild y rigidez.

Referencias

[1] H. Bray, A. Neves, *Classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than* RP^3. Annals of Mathematics **159** (2004), 407–424.

[2] G. Huisken, T. Ilmanen, *The Inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality* J. Diff. Geom. **59** (2001), 353–437.

[3] M. Mars, *Present status of the Penrose inequality*, Classical Quantum Gravity **26** (2009), no. 19, 193001.

[4] R. Penrose, *Naked singularities*, Ann. New York Acad. Sci., **224** (1973) 125–134.