

Superficies de curvatura media constante en espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

José M. Manzano – Instituto de Ciencias Matemáticas
manzanoprego@gmail.com

Se presenta a continuación una propuesta para un curso de doctorado de 6 horas dentro del programa de doctorado *Matemáticas*, que tendrá lugar en la Universidad de Granada durante el mes de octubre de 2017.

1. Motivación

El objeto principal de este minicurso es dar una introducción a la teoría de superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos riemannianos 3-dimensionales simplemente conexos con grupo de isometrías de dimensión 4. Dichos espacios están contenidos en una familia $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, que depende de dos parámetros $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ e incluye geometrías de Thurston como los espacios de curvatura constante \mathbb{R}^3 y \mathbb{S}^3 , los productos $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, o los grupos de Lie Nil_3 , $\text{SU}(2)$ y $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ con ciertas métricas invariantes a izquierda.

La teoría de superficies de curvatura media constante en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ es un campo de investigación muy activo que ha recibido una atención considerable durante las últimas décadas. A lo largo del curso se discutirán de forma detallada algunos de los resultados más destacados en la teoría, como pueden ser la existencia de diferenciales cuadráticas holomorfas y de aplicaciones armónicas con significado geométrico, las correspondencias de tipo isométrico y conforme que conectan las teorías en distintos espacios, o la solución del problema de Bernstein para superficies de curvatura media crítica. En este proceso, se tratará una selección de técnicas típicas de esta teoría, que comprenden tanto ideas originalmente desarrolladas para superficies en espacios de curvatura constante como otras que sólo tienen sentido en este contexto más general.

2. Contenidos.

El curso está planificado para una duración total de 6 horas, estructuradas en tres sesiones de dos horas, de acuerdo a los siguientes contenidos:

Sesión 1 Propiedades básicas de los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

1. Clasificación de los espacios homogéneos 3-dimensionales.
2. Modelos para los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ y estructuras de submersión de Killing.

3. Propiedades riemannianas: curvatura, geodésicas e isometrías.
4. Inmersiones isométricas y ecuaciones de compatibilidad.
5. Superficies totalmente umbilicales y superficies con curvaturas principales constantes.

Sesión 2 Teoría conforme de superficies de curvatura media constante en $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

1. La diferencial de Abresch–Rosenberg.
2. Superficies invariantes y la clasificación de las esferas de curvatura media constante.
3. Aplicación de Gauss armónica para superficies de curvatura media crítica.
4. La deformación isométrica tipo Lawson
5. La dualidad conforme tipo Calabi.

Sesión 3 Grafos, multigrafos y otras construcciones.

1. Multigrafos completos con curvatura media constante.
2. El problema de Bernstein para grafos de curvatura media crítica.
3. El problema de Jenkins–Serrin para grafos de curvatura media subcrítica.
4. Un breve recorrido por las superficies de curvatura media supercrítica.

Referencias

- [1] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.* **28** (2005), 1–28.
- [2] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, **82** (2007), no. 1, 87–131.
- [3] B. Daniel, I. Fernández, P. Mira. The Gauss map of surfaces in $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$. *Calc. Var.* **52** (2015), 507–528.
- [4] B. Daniel, L. Hauswirth, P. Mira. Constant mean curvature surfaces in homogeneous manifolds Notes of the 4th KIAS Workshop on Differential Geometry, Seoul, 2009.
- [5] J. M. Espinar, H. Rosenberg. Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces. *Comment. Math. Helv.*, **86** (2011), no. 3, 659–674.
- [6] I. Fernández, P. Mira. Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361** (2011), no. 11, 5737–5752.
- [7] H. Lee. Extensions of the duality between minimal surfaces and maximal surfaces. *Geom. Dedicata*, **151** (2011), 373–386.
- [8] J. M. Manzano. Dual quadratic differentials and entire minimal graphs in Heisenberg space. Preprint available at arXiv:1708.06671.
- [9] J. M. Manzano, M. M. Rodríguez. On complete constant mean curvature vertical multigraphs in $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. *J. Geom. Anal.* **25** (2015), no. 1, 336–346.
- [10] J. M. Manzano, F. Torralbo. New examples of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Michigan Math. J.*, **63** (2014), no. 4, 701–723.