

Máster en Estadística Aplicada

Trabajo Fin de Máster

Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión

Daniel Solano Varela



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada

Tutor

Prof. Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

Granada, septiembre de 2021

Máster en Estadística Aplicada

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo de investigación presentado por D. Daniel Solano Varela y dirigido por el profesor Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

VºBº

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Francisco de Asís Torres Ruiz', written in a cursive style.

Francisco de Asís Torres Ruiz

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Daniel Solano Varela', written in a cursive style.

Daniel Solano Varela

Índice general

Introducción	7
1. Procesos de difusión	9
1.1. Generalidades sobre procesos estocásticos	9
1.1.1. Definición y conceptos generales	9
1.1.2. Algunos tipos de procesos estocásticos	11
1.2. Procesos de Markov y ecuaciones cinéticas	16
1.3. Simplificación de las ecuaciones cinéticas. Teorema de Pawula. Ecuaciones de Kolmogorov.	17
1.4. Definición de proceso de difusión.	18
1.5. Proceso de difusión y las ecuaciones de Kolmogorov.	20
2. Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión	23
2.1. Integral estocástica en el sentido de Itô	23
2.1.1. Integral de Itô	25
2.2. Diferenciales estocásticas. La formula de Itô	28
2.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas	33
2.3.1. Planteamiento general. Cálculo de la media y la varianza de la ecuación	33
2.3.2. Existencia y unicidad de la solución. La solución como proceso de Markov y de difusión	34
2.3.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales	35
2.3.4. Algunas técnicas de resolución.	39

3. Procesos de difusión basados en fenómenos de crecimiento	51
3.1. Planteamiento general	51
3.2. El proceso lognormal como generador de procesos de crecimiento	52
3.3. Solución de la ecuación diferencial (3.1) y principales características del proceso .	53
3.4. Inferencia en el proceso de difusión lognormal no homogéneo	58
3.4.1. Estimación de los parámetros del modelo	59
4. Ejemplo de aplicación. El proceso de difusión Hubbert	63
4.1. La curva de Hubbert	63
4.2. Obtención de la Curva de Hubbert a partir de la curva logística. Principales características	64
4.2.1. Características de la curva	65
4.3. Proceso de difusión Hubbert	66
4.4. Inferencia en el proceso de Hubbert	69
4.5. Estimación de los parámetros	75
4.5.1. Búsqueda de una solución inicial para el sistema	75
4.5.2. Ajuste y predicción del modelo	77
4.5.3. Estudio de simulación	79
4.5.4. Aplicación a datos reales	81

Introducción

En diversas áreas del conocimiento, tales como biología, física, ingeniería, economía, entre otros, a menudo se enfrentan con el problema de modelar fenómenos o procesos que evolucionan con el tiempo, es decir, sistemas dinámicos. Entre estos modelos se encuentran los procesos de difusión y, en particular, los relacionados con fenómenos de crecimiento que son los de interés en este trabajo.

Los procesos de difusión son casos especiales de procesos de Markov con trayectorias muestrales continuas que, para poder realizar inferencia, se necesita conocer las distribuciones del proceso y las funciones de densidad en caso de que existan (en este trabajo se asume que existen). Si bien estos procesos satisfacen la propiedad de Markov, esto no es suficiente para determinar las distribuciones.

Dos maneras de abordar este problema son las siguientes: a) Dado que, bajo ciertas condiciones, los procesos de difusión satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov y de Fokker-Planck, se puede usar métodos como la Transformada de Laplace o el método de separación de variable -entre otros- para resolver estas ecuaciones y así obtener las distribuciones de transición y las funciones de densidad. b) Hacer uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas. De hecho, las ecuaciones diferenciales estocásticas fueron originalmente desarrolladas como una herramienta para la construcción explícita de las trayectorias de procesos de difusión dados los momentos infinitesimales. Este último es el que se desarrolla en este trabajo.

En los problemas asociados a procesos de difusión, habitualmente se debe resolver ecuaciones de la forma

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) \xi_t, \quad X_{t_0} = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty,$$

donde ξ_t es un ruido blanco. Este ruido blanco puede ser identificado con un proceso de Wiener, a saber, $W_t = \int_0^t \xi_s ds$. Tales ecuaciones fueron tratadas en primera instancia por Paul Langevin (1872-1946) en el estudio del movimiento browniano de una partícula en un fluido.

La forma integral de la ecuación anterior está dada por

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Respecto a las integrales que intervienen en la ecuación, la primera puede ser considerada como una integral de Riemann-Stieltjes pero la segunda integral no, ya que, en particular, el proceso de Wiener no es de variación acotada. En 1951, Kiyoshi Itô definió las integrales de la forma $\int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s$ y con ello le dió una base sólida a la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Cabe destacar que, la integral en el sentido de Itô no es la única integral estocástica que se ha definido, tal es el caso de la integral de Stratonovich. Sin embargo, para propósitos de inferencia es la que ha resultado más útil.

El objetivo de este trabajo es abordar los procesos de difusión desde la óptica de las ecuaciones diferenciales estocásticas y posteriormente tratar el tema de la inferencia para el proceso de difusión lognormal con factores exógenos y aplicarlo a un problema real. La estructura del trabajo es la siguiente: En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de procesos estocásticos y ejemplos de procesos; asimismo, se da la definición de procesos de difusión y de los momentos infinitesimales del proceso y, finalmente, se establece la relación entre las soluciones de las ecuaciones de Kolmogorov y de Fokker-Planck y los procesos de difusión. El capítulo 2 está dedicado a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Inicia con un resumen de la construcción de la integral estocástica en el sentido de Itô, se presenta la definición y resultados importantes relacionados con el teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial lineal y los procesos gaussianos y de difusión. El capítulo finaliza con el uso de algunos métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias al cálculo de ecuaciones estocásticas. El capítulo 3 está dedicado a los procesos de difusión relacionados con fenómenos de crecimiento, específicamente, al proceso de difusión lognormal no homogéneo; se presentan las principales características del proceso y las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud. Por último, en

el capítulo 4 se analiza el proceso de difusión de Hubbert -el cual es un caso particular de los procesos de difusión lognormal-. Al igual que en el capítulo 3, se presentan las principales características del proceso, se determina las funciones de verosimilitud y log-verosimilitud y se determina el sistema a resolver para determinar las estimaciones máximo verosímiles aplicando el teorema de zehna. El capítulo termina con una aplicación del proceso de Hubbert al problema de estimar la producción de petróleo en Noruega y Kazajistán.

Procesos de difusión

1.1. Generalidades sobre procesos estocásticos

1.1.1. Definición y conceptos generales

Los procesos estocásticos son una herramienta fundamental para describir sistemas dinámicos cuya evolución en el tiempo son de naturaleza probabilística. Es decir, los procesos estocásticos amplían el concepto de variable aleatoria para incluir el tiempo.

Definición 1.1.1. (*Proceso estocástico*) Sea I un conjunto ordenado, (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y (E, \mathcal{G}) un espacio medible. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $X = \{X_t(\omega) : t \in I, \omega \in \Omega\}$ tal que, para cada $t \in I$, X_t es una variable aleatoria de (Ω, \mathcal{F}, P) a (E, \mathcal{G}) .

El conjunto I puede ser discreto o continuo. En tal caso nos referimos al proceso como proceso en tiempo discreto o proceso en tiempo continuo, según sea el caso. En lo que sigue se asumirá que $I = [t_0, T]$, con $t_0 > 0$, $t_0 < T$ y T puede ser infinito.

En este trabajo asumiremos que el espacio de estados E es \mathbb{R} o \mathbb{R}^d , \mathcal{G} es la σ -álgebra de los conjuntos de Borel \mathcal{B} o \mathcal{B}^d .

Si $X = \{X_t(\omega) : t \in I, \omega \in \Omega\}$ es un proceso estocástico, entonces:

- $X_t(\omega)$, para cada t fija, es una variable aleatoria \mathbb{R} (o \mathbb{R}^n)–valuada.
- $X_t(\omega)$, para cada ω fija, es una función \mathbb{R} (o \mathbb{R}^n)–valuada definida en I . Esta función se denomina trayectoria muestral asociada a ω .

Dado que, para cada $t \in I$, X_t es una variable aleatoria, entonces se puede calcular una serie de funciones asociadas al proceso, tales como: la función media, la función covarianza, la función característica, la funciones momentos de orden k , entre otras.

Las **distribuciones finito dimensionales** de un proceso estocástico, son las distribuciones de las variables aleatorias E^k -valuadas $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario y tiempos arbitrarios $t_i \in I$, $i \in \{1, \dots, k\}$, dadas por

$$F_{t_1, \dots, t_k}(x) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k)$$

Un proceso estocástico $\{X_t : t \in I\}$ tiene **incrementos independientes** si $\forall n \in \mathbb{N}$, y para cualquiera $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

De la definición se sigue que las distribuciones finito dimensionales del proceso vienen determinadas por las distribuciones marginales unidimensionales y por las de $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $i = 2, \dots, n$.

Si la distribución de los incrementos $X_t - X_s$ sólo depende de la diferencia $t - s$ entonces se dice que los incrementos son estacionarios. Si la distribución de $X_{t+s} - X_s$ es igual a la distribución de X_t , $\forall s, t \geq 0$, entonces se dice que los incrementos son homogéneos.

Un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ es **estrictamente estacionario** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tal que $t_{1+h}, \dots, t_{n+h} \in T$ y $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \in \mathcal{F}$ se verifica

$$P(X_{t_{1+h}} \in \mathcal{F}_1, \dots, X_{t_{n+h}} \in \mathcal{F}_n) = P(X_{t_1} \in \mathcal{F}_1, \dots, X_{t_n} \in \mathcal{F}_n)$$

De la definición anterior podemos ver que, si un proceso es estrictamente estacionario, entonces las distribuciones finito-dimensionales son invariantes con respecto a una traslación en el espacio paramétrico. Además, si $E[|X_t|^2] < \infty$, entonces:

- a) Si la función media existe entonces es constante pues las distribuciones finito unidimensionales coinciden.
- b) $Cov_X(s, t) := Cov_X(X_s, X_t) = Cov(0, t - s)$. Es decir, la función covarianza sólo depende de la diferencia $t - s$.

Un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ tal que los momentos de segundo orden existen y, además, satisface las condiciones a) y b) anteriores se dice que es débilmente estacionario.

1.1.2. Algunos tipos de procesos estocásticos

Martingalas

Definición 1.1.2. Una filtración es una colección de σ -álgebras $\{\mathcal{N}_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\mathcal{N}_m \subseteq \mathcal{N}_n$, cuando $m \leq n$. En particular, la filtración canónica de un proceso $\{X_t : n \geq 1\}$ es aquella sucesión de σ -álgebras definidas por $\mathcal{N}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$, $n \geq 1$.

Definición 1.1.3. Se dice que un proceso estocástico $X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R^n$ es adaptado con respecto a la filtración \mathcal{N}_t si, para cada $t \geq 0$, la función $\omega \rightarrow X(t, \omega)$ es \mathcal{N}_t -medible.

Un proceso estocástico n -dimensional $\{M_t\}_{t \geq 0}$ en (Ω, \mathcal{F}, P) es llamado una **martingala** con respecto a la filtración $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ (y con respecto a P) si:

- i) M_t es \mathcal{N}_t -medible para todo t .
- ii) $E[|M_t|] < \infty$ para todo t .
- iii) $E[M_t | M_s] = M_s$ para todo $t \geq s$.

Si en el punto iii) de la definición anterior se cambia el igual por \leq o \geq , entonces el par $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ es llamada una supermartingala o una submartingala, respectivamente.

Un ejemplo de una martingala es recorrido aleatorio simétrico

$$X_t = \begin{cases} +1, & \text{con probabilidad } 1/2. \\ -1, & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

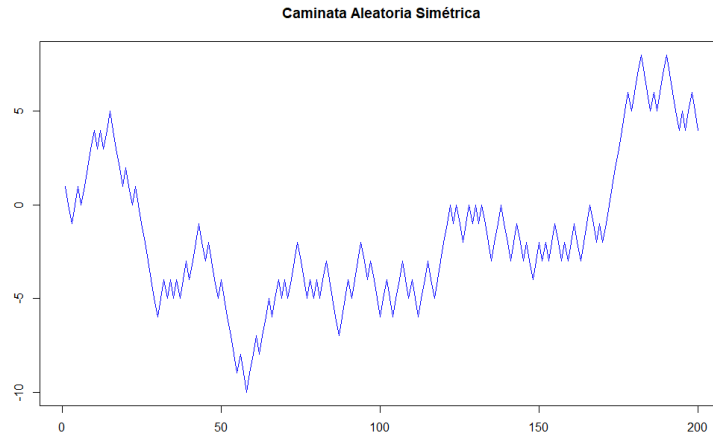


Figura 1.1: Recorrido aleatorio simétrico

Procesos de Markov

Una de las clases de procesos que son de gran relevancia en este trabajo son los procesos de Markov. La base para la teoría de los procesos estocásticos de Markov fue establecida en 1906 por A. A. Markov quien, en su investigación de experimentos conectados, formuló el principio o propiedad que ahora lleva su nombre y veremos a continuación.

Definición 1.1.4. (*Proceso de Markov*). Un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ definido en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es llamado un **proceso de Markov** si satisface la siguiente condición: Para $t_0 \leq s \leq t \leq T$ y para todo $B \in \mathcal{B}^d$, se cumple

$$P(X_t \in B | \mathcal{F}[t_0, s]) = P(X_t \in B | X_s)$$

con probabilidad 1.

La condición de la definición se conoce como la propiedad de Markov. Intuitivamente, la propiedad de Markov indica que *si el estado de un sistema en el tiempo presente es conocido, la información adicional con respecto al comportamiento del sistema en el pasado no afecta nuestro conocimiento del desarrollo probable en el futuro.*

La propiedad de Markov es equivalente a la siguiente condición: $\forall n \geq 0$ y para cualquiera

$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \in T$ se verifica

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0) \\ = P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n). \end{aligned}$$

Si $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ es un proceso de Markov, existe una distribución condicional $P(X_s, s; B, t)$ (ver [1]), llamada distribución de probabilidad de transición, correspondiente a la probabilidad condicional $P(X_t \in B | X_s = x)$.

La probabilidad $P(X_s, s; B, t)$ satisface las siguientes propiedades:

- a) $P(\cdot, t; x, s)$ es una probabilidad en \mathcal{B}^d , para todo s, t , con $s < t$, y para todo $x \in \mathbb{R}^d$.
- b) $P(B, t; \cdot, s)$ es \mathcal{B}^d -medible, para todo s, t , con $s < t$, y $B \in \mathcal{B}^d$.
- c) Para $t_0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ y $B \in \mathcal{B}^d$ se verifica la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$P(B, t; x, s) = \int_{\mathbb{R}^d} P(B, t; y, u) P(dy, u; x, s)$$

Si la probabilidad $P(\cdot, t; x, s)$ tiene una función de densidad, la cual denotaremos por $f(x, t|y, s)$, entonces la ecuación de Chapman-Kolmogorov se escribe como

$$f(x, t|y, s) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, t|z, u) f(z, u|y, s) dz, \forall x, y, \forall s \leq u \leq t.$$

Si las probabilidades de transición verifican la propiedad

$$P(B, t; x, s) = P(B, t+h; x, s+h), \forall x, \forall B \in \mathcal{B}^d, \forall h \in \mathbb{R}$$

se dirá que las probabilidades de transición son estacionarios y el proceso de Markov se dice homogéneo en el tiempo.

La probabilidades de transición juegan un papel muy importantes en los procesos de Markov porque a partir es estas, y de la distribución inicial, se obtienen las distribuciones finito dimensionales. Es decir, si $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ es un proceso de Markov, $P(B, t; x, s)$ su densidad de

transición y $P_{t_0}(A)$ la distribución de X_{t_0} , entonces para las distribuciones finito dimensionales $P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n)$, con $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ y $B_i \in \mathcal{B}^d$, se verifica

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B_1} \cdots \int_{B_{n-1}} P(B_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot P(dx_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}) \cdots \cdots P(dx_1, t_1; x_0, t_0) P(dx)$$

Otro aspecto relevante de las densidades de transición es la siguiente: Dada una probabilidad de transición $P(B, t; x, s)$. Entonces, para toda probabilidad inicial P_{t_0} en \mathcal{B}^d , existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un proceso de Markov definido sobre este, el cual tiene distribución de transición $P(B, t; x, s)$ y para el cual X_{t_0} tiene distribución P_{t_0} .

A continuación se muestran un par de resultados importantes con respecto a los procesos de Markov:

- Si $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ un proceso de Markov y g una función medible borel invertible, entonces el proceso $\{g(X_t) : t \in [t_0, T]\}$ es de Markov.
- Si $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ es un proceso con incrementos independientes para los cuales existen las densidades finito dimensionales, entonces el proceso es de Markov. (ver [3])

Procesos Gaussianos

Definición 1.1.5. *Un proceso estocástico $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ es llamado **gaussino** si cualquier combinación lineal de la forma $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ es una variable normal unidimensional.*

De la definición vemos que una condición necesaria para que un proceso sea gaussiano es que X_t sea normal, $\forall t$. Además, por la ley normal multivariante, para cualesquiera $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in [t_0, T]$, con $n \in \mathbb{N}$, el vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^t$ es normal multivariante.

El siguiente teorema caracteriza los procesos gaussianos.

Teorema 1.1.1. Teorema. *Un proceso estocástico $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ es gaussiano si y solo si se verifican las siguientes condiciones:*

- i. *Es de segundo orden, es decir, $E[X_t^2] < \infty, \forall t \in [t_0, T]$.*

ii. Para cualquier colección finita $\{t_1, \dots, t_n\}$, con $t_j \in [t_0, T]$, y para todo $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ se verifica

$$E \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{t_j} \right) \right] = \exp \left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j m_X(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_j \lambda_l C_X(t_j, t_l) \right)$$

Del teorema anterior vemos que los procesos gaussianos vienen determinados a partir de las funciones media y covarianza.

Un proceso gaussiano de gran interés para este trabajo es el proceso de Wiener o movimiento browniano. A continuación su definición y algunas propiedades.

Definición 1.1.6. (Proceso de Wiener). Un proceso de Wiener o Movimiento Browniano es un proceso gaussiano $\{W_t : t \geq 0\}$ cuyas distribuciones finito dimensionales están determinadas por las siguientes condiciones:

1. $m_W(t) = 0$, para todo $t \geq 0$.
2. $C_W(s, t) = \min(s, t)$.

Un proceso de Wiener d -dimensional es un vector de d procesos de Wiener unidimensionales independientes $W_t = (W_1(t), \dots, W_d(t))^t$.

La gráficas que se a continuación corresponde a la simulación de un proceso de Wiener.

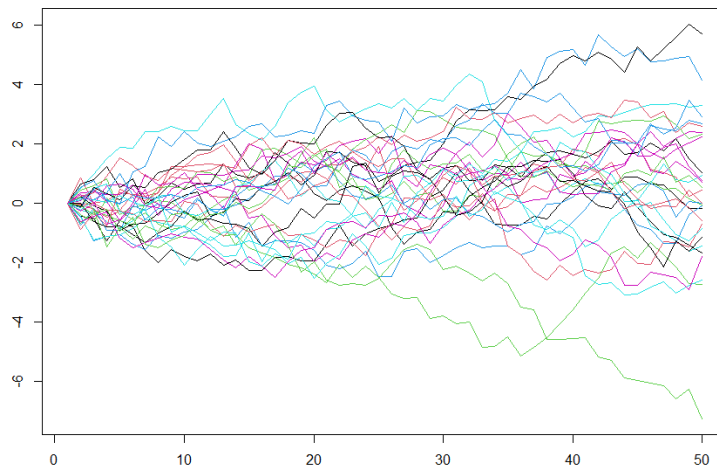


Figura 1.2: Proceso de Wiener

Las propiedades más importantes del proceso de Wiener se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. *El proceso de Wiener verifica las siguientes propiedades:*

- a) $W_0 = 0$ c.s.
- b) *Es un proceso de Markov.*
- c) $W_t | W_s = \omega_s \rightsquigarrow N_1(\omega_s, t - s)$.
- d) *Es un proceso de incrementos independientes, estacionarios y homogéneos.*
- e) *Es continuo muestral casi seguro.*

1.2. Procesos de Markov y ecuaciones cinéticas

Ecuaciones cinéticas para procesos markovianos

Dado $\{X_t : t \in T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo con espacio de estados continuo, es natural hacernos la siguiente pregunta: Si suponemos que las funciones de densidad de transición $f(x, t|y, s)$ existen, ¿Cómo calcularlas?

Si bien, las funciones de densidad de transición verifican la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$f(x, t|y, s) = \int f(x, t|z, \tau) f(z, \tau|y, s) dz. \quad (1.1)$$

esto no es suficiente para calcular dichas densidades. Sin embargo, una manera de lograr el objetivo consiste en buscar una forma diferencial de la ecuación (1) cuya solución nos proporcione las densidades de transición. Las ecuaciones diferenciales que se obtienen son

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n [f(x, t|y, s) A_n(x, t)]}{\partial x^n} \quad (1.2)$$

y

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(y, s)}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|y, s)}{\partial y^n}, \quad (1.3)$$

donde $A_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (y - x)^n f(y, t + \Delta t | x, t) dy$.

Estas ecuaciones son llamadas *Ecuación Cinética Adelantada y Atrasada*, respectivamente, y las funciones $A_n(t, x)$ se denominan momentos infinitesimales del proceso.

Note que

$$A_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (y - x)^n f(y, t + \Delta t | x, t) dy = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(\Delta X_t)^n | X_t = x],$$

donde $\Delta X_t = X_{t+h} - X_t$. Así, para Δt pequeño, se tiene que

$$\begin{aligned} E[\Delta X_t | X_t = x] &\approx A_1(x, t) \Delta t \\ E[(\Delta X_t)^2 | X_t = x] &\approx A_2(x, t) \Delta t. \end{aligned}$$

El momento infinitesimal $A_1(x, t)$ se llama media infinitesimal (o drift) del proceso y a $A_2(x, t)$ la varianza infinitesimal.

Si el proceso es homogéneo, entonces sus densidades de transición sólo dependen de la diferencia entre el instante presente y el inicial, es decir, $f(y, t + \Delta t | x, t) = f(y, \Delta t | x, 0)$, por lo que los momentos infinitesimales no dependen del tiempo.

Por último, observe que las funciones $A_n(t, x)$ corresponden a los momentos de los incrementos condicionados del proceso.

1.3. Simplificación de las ecuaciones cinéticas. Teorema de Pawula. Ecuaciones de Kolmogorov.

Observando las ecuaciones anteriores, vemos que para dar respuesta a nuestra pregunta original se nos presenta el problema, no menos complejo, de que las derivadas son de orden alto.

El siguiente resultado nos proporciona la respuesta a la pregunta original debido a que reduce, bajo ciertas condiciones, las ecuaciones anteriores a ecuaciones diferenciales de orden dos que se podrán resolver ya sea por métodos analíticos, o bien, por métodos numéricos.

Teorema 1.3.1. (Pawula, 1967). Si $A_n(x, t) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ y si $A_n(x, t) = 0$ para algún n par, entonces $A_n(x, t) = 0 \forall n \geq 3$.

Para los detalles de la demostración ver [2].

Por lo tanto, bajo las condiciones del Teorema de Pawula, las ecuaciones cinética adelantada y cinética atrasada quedan en la forma

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} = \frac{\partial [f(x, t|y, s) A_1(x, t)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [f(x, t|y, s) A_2(x, t)]}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial y} + \frac{A_2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|y, s)}{\partial y^2} = 0, \quad (1.5)$$

respectivamente. Estas ecuaciones se denominan *Ecuación de Fokker-Planck* y *Ecuación de Kolmogorov*, respectivamente.

Note que en la ecuación (4) las variables iniciales están fijas mientras que en la ecuación (5) se describe el desarrollo del proceso que conduce a un estado asignado en el instante presente.

1.4. Definición de proceso de difusión.

Los procesos de difusión son casos especiales de procesos de Markov con trayectorias muestrales continuas, los cuales son muy utilizados para modelar fenómenos de crecimientos en diversas áreas del conocomiento.

Definición 1.4.1. Un proceso de Markov $\{X_t : t_0 \leq t \leq T\}$ con espacio de estados continuo y en tiempo continuo se dice que es un proceso de difusión si tiene trayectorias continuas casi seguro y $\forall \epsilon > 0$ y $\forall x$ se verifica

I. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} F(dy, t+h|x, t) = 0$

II. Existen funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ tales que

a) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x) F(dy, t+h|x, t) = A_1(x, t).$

b) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^2 F(dy, t+h|x, t) = A_2(x, t).$

donde $F(x, t|y, s)$ es la función de distribución de transición.

La primera condición significa que grandes cambios en un lapso muy corto por poco probables.

Note que las funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ son los momentos truncados de los incrementos condicionados y no corresponden exactamente a los definidos en las ecuaciones cinéticas. La razón de usar los momentos infinitesimales truncados se debe a que estos siempre existen.

Si bien en la definición de un proceso de difusión sólo aparecen los dos primeros momentos infinitesimales truncados, nos preguntamos: ¿los momentos infinitesimales truncados

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^n F(dy, t+h|x, t)$$

cumplen alguna propiedad similar a la del teorema de Pawula? La respuesta es si. Se puede demostrar que, para $n > 2$, $\epsilon > 0$, $t \in [t, T]$ y x perteneciente al espacio de estados, se verifica que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^n F(dy, t+h|x, t) = 0.$$

El resultado siguiente nos proporciona una herramienta que, en algunas ocasiones, es más funcional al momento de determinar si un proceso es de difusión.

Teorema 1.4.1. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo, con espacio de estados continuo, con trayectorias continuas casi seguro y que verifica las siguientes condiciones:*

a) *Existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^{2+\delta} F(dy, t+h|x, t) = 0$.*

b) *Existen funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ tal que $\forall x$*

I. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x) F(dy, t+h|x, t) = A_1(x, t).$

II. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^2 F(dy, t+h|x, t) = A_2(x, t).$

Entonces $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso de difusión.

Un aspecto importante a considerar del teorema anterior es que los momentos infinitesimales de orden 1 y 2, en caso de existir y con la condición anterior, coinciden con los momentos

infinitesimales truncados. No obstante, el teorema anterior no garantiza que los momentos infinitesimales de orden mayor a 2 sean nulos.

1.5. Proceso de difusión y las ecuaciones de Kolmogorov.

Los teoremas que se presentan a continuación nos muestran que los procesos de difusión satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov y de Fokker-Planck.

Teorema 1.5.1. *Sea $\{X_t : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión. Suponga que para cada (x, t) , su función de distribución $F(x, t|y, s)$ es dos veces derivable con respecto a y , siendo las derivadas continuas y acotadas. Entonces $F(x, t|y, s)$ es derivable con respecto a s y verifica la ecuación atrasada de Kolmogorov*

$$\frac{\partial F(x, t|y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial F(x, t|y, s)}{\partial y} + \frac{A_2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 F(x, t|y, s)}{\partial y^2} = 0, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición $\lim_{s \uparrow t} F(x, t|y, s) = \lim_{s \uparrow t} P[X_t \leq x | X_s = y] = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq y \\ 0, & \text{si } x < y \end{cases}$.

Es importante indicar que, en caso de que existan las densidades de transición, se verifica la ecuación atrasada para las densidades con la condición inicial

$$\lim_{s \uparrow t} f(x, t|y, s) = \delta(x - y)$$

El siguiente resultado generaliza el resultado anterior a una clase más amplia de funciones.

Teorema 1.5.2. *Sea $\{X_t : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión con función de distribución de transición $F(x, t|y, s)$. Sea ψ una función acotada y continua tal que $u(y, s) = \int \psi(x) F(dx, t|y, s)$ tenga primera y segunda derivadas continuas y acotadas respecto a y . Entonces la función u tiene derivada con respecto a s para $s < t$ y $y \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación*

$$\frac{\partial u(y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial u(y, s)}{\partial y} + \frac{A_2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 u(y, s)}{\partial y^2} = 0, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición de frontera $\lim_{s \uparrow t} f(y, s) = \psi(y)$.

Teorema 1.5.3. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso de difusión. Supongamos que existen las derivadas $\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t}$, $\frac{\partial [A_1(x, t) f(x, t|y, s)]}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 [A_2(x, t) f(x, t|y, s)]}{\partial x^2}$ y son continuas. Entonces $f(x, t|y, s)$ verifica la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x, t) f(x, t|y, s)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x, t) f(x, t|y, s)]}{\partial x^2}, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición $\lim_{t \downarrow s} f(x, t|y, s) = \delta(x - y)$.

Los teoremas anteriores nos dan las herramientas para determinar las distribuciones de transición y las densidades de transición (en caso de que existan) de los procesos de difusión, esto a través de la solución de las ecuaciones de Kolmogorov sujetas a las condiciones iniciales dadas en los teoremas. Para resolver estas ecuaciones se emplean métodos matemáticos tales como la transformada de Laplace, la transformada de Fourier, transformaciones al proceso de Wiener, entre otros.

No obstante, solucionar estas ecuaciones es una tarea bastante compleja y depende de las condiciones analíticas de los momentos infinitesimales. Este tipo de problemas han sido objeto de estudio de grandes matemáticos como es el caso de Feller.

Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión

Como vimos brevemente en el capítulo anterior, obtener las densidades de transición de los procesos de difusión a través de las ecuaciones de Kolmogorov es una tarea bastante compleja. Otra manera de abordar este problema es a través de las ecuaciones diferenciales estocásticas y es el propósito de este capítulo. Para tal fin, necesitamos abordar el tema de integración estocástica el cual se justificará más adelante.

2.1. Integral estocástica en el sentido de Itô

La integral en el sentido Itô, fue introducida en 1944 por el matemático japonés K. Itô, y fue originalmente motivado por una construcción de procesos de difusión.

Recordemos que la solución del problema de valor inicial determinístico

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t), \quad x_{t_0} = x_0, \quad (2.1)$$

con $f(t, x_t)$ una función continua, es equivalente a la solución de la ecuación integral

$$x_t = c + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds$$

Pues bien, el análisis de sistemas dinámicos estocásticos frecuentemente conduce a ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma

$$dX_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \xi_t,$$

donde b y σ son funciones \mathbb{R}^d -valuadas y ξ_t es un ruido blanco.

Aunque ξ_t no es un proceso estocástico usual, la integral de ξ_t se puede identificar con un proceso de Wiener, es decir,

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds$$

o bien, $dW_t = \xi_t dt$.

Así, en analogía con el caso determinístico, la ecuación (2.1) se transforma en una ecuación integral

$$X_t = c + \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_t,$$

donde c es una variable aleatoria arbitraria.

La primera integral puede ser entendida como una integral de Riemann mientras que la segunda es de carácter estocástica y merece especial atención. Se puede probar que las trayectorias de un proceso de Wiener son de variación no acotada casi siempre y, por lo tanto, la segunda integral no se puede interpretar como una integral de Riemann-Stieltjes.

Suponga que $0 < t_0 < T$ y $\sigma(t, x)$ es dada. Queremos definir la integral

$$\int_{t_0}^T \sigma(t, x) dW_t$$

Definición 2.1.1. Sea $W_t(x)$ un proceso de Wiener n -dimensional. Entonces definimos $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$ ser la σ -álgebra generada por las variables aleatorias $\{W_i(s) : 0 \leq s \leq t\}_{1 \leq i \leq n}$. Es decir, \mathcal{F}_t es la σ -álgebra más pequeña conteniendo todos los conjuntos de la forma

$$\{\omega : B_{t_1}(\omega) \subset F_1, B_{t_2}(\omega) \subset F_2, \dots, B_{t_k}(\omega) \subset F_k\},$$

donde $t_{i_j} \leq t$ y $F \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos de Borel para $j \leq k = 1, 2, \dots$. Se asumirá que todo los conjuntos de medida cero están en \mathcal{F}_t . La σ -álgebra \mathcal{F}_t la podemos interpretar como la historia del proceso hasta el tiempo t .

En primera instancia se definirá la integral de Itô para la siguiente clase de funciones:

Definición 2.1.2. Sea $\Gamma = \Gamma(t_0, t)$ la clase de funciones $X(t, x) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

I) $(t, x) \rightarrow X(t, x)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -medible, donde \mathcal{B} denota la σ -álgebra de Borel sobre $[0, \infty)$.

II) $X(t, x)$ es \mathcal{F}_t -adaptado.

III) $E \left[\int_{t_0}^t f^2(s, x) ds \right] < \infty$.

2.1.1. Integral de Itô

El procedimiento para definir la integral de Itô es análogo al de otros tipos de integrales, es decir, empieza con la definición para una clase simple de funciones y luego se extiende por un procedimiento de aproximación.

Para la función elemental $\phi(t, x) = \sum_j e_j(x) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t)$ se define la integral estocástica en el sentido Itô como

$$\int_{t_0}^t \phi(s, x) dB_s = \sum_{j \geq 0} e_j(x) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](x).$$

Una de las propiedades más importantes de la integral anterior es la que se presenta a continuación (para detalles, ver [14]).

Lema 2.1.1. (Isometría de Itô). Si $\phi(t, x)$ es acotada y elemental entonces

$$E \left[\left(\int_{t_0}^t \phi(s, x) dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_{t_0}^t \phi^2(s, x) dW_s \right] \quad (2.2)$$

Haciendo uso del lema anterior, se extiende la definición de la integral de funciones elementales a funciones de Γ . Los pasos se muestran a continuación:

Paso 1. Sea $g \in \Gamma$ acotada y $g(\cdot, x)$ continua para todo ω . Entonces existe funciones elementales

$\phi_n \in \Gamma$ tal que

$$E \left[\int_{t_0}^t (g - \phi_n)^2 ds \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Paso 2. Sea $h \in \Gamma$ acotada. Entonces existen funciones acotadas $g_n \in \Gamma$ tal que $g_n(\cdot, \omega)$ es continua para todo x y n , y

$$E \left[\int_{t_0}^t (h - g_n)^2 ds \right] \rightarrow 0.$$

Paso 3. Sea $f \in \Gamma$. Entonces existe una sucesión $\{h_n\} \subset \Gamma$ tal que h_n es acotada para cada n

y

$$E \left[\int_{t_0}^t (f - h_n)^2 ds \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

A partir de los pasos anteriores se tiene la siguiente definición:

Definición 2.1.3. (Integral de Itô). Para la función $f \in \Gamma$ se define la integral en el sentido de Itô como

$$\int_{t_0}^t f(s, x) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \phi_n(s, x) dW_s \text{ (límite en } L^2(P) \text{)} \quad (2.3)$$

donde $\{\phi_n\}$ es una sucesión de funciones elementales tal que

$$E \left[\int_{t_0}^t (f(s, x) - \phi_n(s, x))^2 ds \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

A partir de (2.2) y (2.3) obtienen los siguientes resultados:

Corolario 2.1.1. (Isometría de Itô). Para $f \in \Gamma$ se tiene que

$$E \left[\left(\int_{t_0}^t f(s, x) dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_{t_0}^t f^2(s, x) dW_s \right]$$

Corolario 2.1.2. . Si $f(s, x), f_n(s, x) \in \Gamma(t_0, t)$ y $E \left[\left(\int_{t_0}^t [f_n(s, x) - f(s, x)]^2 ds \right) \right] \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0$, entonces

$$\int_{t_0}^t f_n(s, x) dW_s \xrightarrow{n \uparrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x) dW_s \text{ en } L^2(P)$$

Ejemplo 2.1.1. . Si $W_0 = 0$, muestre que $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$.

Solución. Sea $\phi_n(s, \omega) = \sum W_{t_j}(\omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(s)$. Entonces

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t (\phi_n(s, \omega) - W_s)^2 ds \right] &= E \left[\sum_{j \geq 0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (W_{t_j} - W_s)^2 ds \right] = \sum_{j \geq 0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} E \left[(W_{t_j} - W_s)^2 \right] ds \\ &= \sum_{j \geq 0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \xrightarrow{\Delta t_j \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Entonces, por el Corolario 2,

$$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n dW_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j \geq 0} W_j \Delta W_j$$

Ahora, utilizando la identidad $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta W_j^2 &= W_{j+1}^2 - W_j^2 = (W_{j+1} - W_j)^2 + 2W_j(W_{j+1} - W_j) \\ &= (\Delta W_j)^2 + 2W_j \Delta W_j \end{aligned}$$

Como $B_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} W_j^2 &= \sum_{j \geq 0} \Delta W_j^2 = \sum_{j \geq 0} (\Delta W_j)^2 + 2 \sum_{j \geq 0} W_j \Delta W_j \\ \Rightarrow \sum_{j \geq 0} W_j \Delta W_j &= \frac{1}{2} W_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} (\Delta W_j)^2 \end{aligned}$$

Desde que $\sum_{j \geq 0} (\Delta W_j)^2 \xrightarrow{\Delta t_j \rightarrow 0} t$ en $L^2(P)$, pues $E \left[\sum_{t_j \leq t} ((\Delta W_j)^2 - t) \right] = 2 \sum_{t_j \leq t} (\Delta t_j)^2$, obtenemos

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Propiedades de la integral de Itô

Teorema 2.1.1. . Sean $f, g \in \Gamma(0, T)$ y sea $0 \leq t_0 < t < T$. Entonces:

a) $\int_{t_0}^T f dW_s = \int_{t_0}^t f dW_s + \int_t^T f dW_s$ c.s.

b) Para c constante, $\int_{t_0}^T (cf + g) dW_s = c \int_{t_0}^T f dW_s + \int_{t_0}^T g dW_s$, c.s.

c) $E \left[\int_{t_0}^T f dW_s \right] = 0$

d) $\int_{t_0}^T f dW_s$ es \mathcal{F}_T -medible.

Una propiedad importante a destacar de la integral de Itô es que, para $f \in \Gamma(0, T)$, existe una versión t -continua de la integral. Así, en adelante asumimos la versión t -continua de la integral. Por otra parte, la integral $\int_0^t f(s, \omega) dW_s$ es una martingala con respecto a la σ -álgebra \mathcal{F}_t .

Para extender la integral de Itô sustituimos las condiciones ii) y iii) de la definición de Martingala en la sección 1.1.2 por las siguientes condiciones:

ii') Existe una familia creciente de σ -álgebras \mathcal{H}_t , con $t \geq 0$, tal que:

- a) W_t es una martingala con respecto a \mathcal{H}_t y
- b) f_t es \mathcal{H}_t adaptada.

iii') $P \left[\int_{t_0}^t f^2(s, \omega) dW_s(\omega) < \infty \right] = 1$.

Definición 2.1.4. . Denotamos $\mathcal{W}_H(t_0, t)$ a la clase de procesos $f(t, \omega) \in \mathbb{R}$ tal que $f(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -medible y satisface las condiciones ii') y iii') de arriba. Sea $\mathcal{W}_H = \bigcap_{t > 0} \mathcal{W}_H(0, t)$. Si $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(n)}$ escribimos $\mathcal{W}(t_0, t)$ en vez de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}^{(n)}}(t_0, t)$.

Sea B_t un proceso de Wiener unidimensional. Si $f \in \mathcal{W}(t_0, t)$ entonces, para todo t , existen funciones escalonadas f_n tal que $\int_0^t |f_n - f| ds \rightarrow 0$ en probabilidad. Para tal sucesión se verifica que $\int_0^t f(t, x) dW_t = \lim_{n \uparrow \infty} \int_0^t f_n(t, x) dW_t$ (límite en probabilidad) para $f \in \mathcal{W}_H$.

Nota. Al igual que en el caso anterior, existe una versión continua de esta integral.

2.2. Diferenciales estocásticas. La formula de Itô

Definición 2.2.1. . Sea B_t un proceso de Wiener unidimensional en (Ω, \mathcal{F}, P) . Un proceso de Itô (o integral estocástica) es un proceso estocástico X_t en (Ω, \mathcal{F}, P) de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, x) ds + \int_0^t \sigma(s, x) dW_s \quad (A1) \quad (2.4)$$

donde $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, por lo que

$$P \left[\int_0^t \sigma^2(s, \omega) dW_s < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1$$

También, asumimos que b es \mathcal{H}_t -adaptado y

$$P \left[\int_0^t |b(s, \omega)| dW_s < \infty, \forall t \geq 0 \right] = 1$$

La ecuación (2.4) se escribe en forma diferencial como

$$dX_t = bdt + \sigma dW_t \quad (A2) \quad (2.5)$$

Teorema 2.2.1. (Fórmula de Itô). Sea X_t un proceso de Itô dado por

$$dX_t = bdt + \sigma dW_t$$

y sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$, entonces

$$Y_t = g(t, X_t)$$

es también un proceso de Itô y se verifica

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2 \quad (A3) \quad (2.6)$$

donde $(dX_t)^2$ se calcula utilizando la tabla de multiplicación de McKean

\times	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Desarrollando la expresión $(dX_t)^2$, la fórmula de Itô se expresa como

$$dY_t = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t$$

La fórmula anterior es la versión estocástica de la regla de la cadena en cálculo diferencial.

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de la fórmula de Itô.

Ejemplo 2.2.1. *Anteriormente probamos que, si $W_0 = 0$, entonces $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$. Obtengamos este resultado a partir de la fórmula de Itô.*

Sea $X_t = W_t$ y $g(t, x) = \frac{1}{2}x^2$. Entonces, $Y_t = \frac{1}{2}W_t^2$ y aplicando la fórmula de Itô obtenemos que

$$dY_t = \frac{1}{2}dt + W_t dW_t$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}d(W_t^2) = \frac{1}{2}dt + W_t dW_t$$

La cual equivale a la fórmula integral

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$$

Ejemplo 2.2.2. *Muestre la fórmula integral*

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$$

Sea $g(t, x) = tx$ y $X_t = W_t$. Entonces $Y_t = g(t, W_t) = tW_t$ y aplicando la fórmula de Itô obtenemos

$$dY_t = W_t dt + t dW_t$$

Es decir,

$$d(tW_t) = W_t dt + t dW_t$$

La cual es equivalente a la fórmula integral

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$$

Ejemplo 2.2.3. . Use el método de igualación de coeficientes para resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = -Y_t dt + e^{-t} dW_t, Y_0 = 0$$

Queremos encontrar una función $g(t, x)$ tal que $Y_t = g(t, W_t)$ sea solución de la ecuación. Aplicando la fórmula de Itô se tiene que

$$dY_t = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, W_t) \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, W_t) dW_t$$

Igualando los coeficientes se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = e^{-t} \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = -g(t, x) \end{cases}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x se obtiene $g(t, x) = e^{-t}x + c(t)$. Sustituyendo en la segunda ecuación y simplificando se obtiene $c'(t) = -c(t)$. Así, $c(t) = ke^{-t}$ y $g(t, x) = e^{-t}x + ke^{-t}$.

Para que se cumpla la condición inicial se debe tener que $k = 0$. Por lo tanto, $g(t, x) = e^{-t}x$ y la solución de la ecuación es

$$Y_t = e^{-t}W_t$$

Teorema 2.2.2. (Integración por Partes). Suponga que $f(t, x)$ es continua y de variación acotada con respecto a $s \in [0, t]$, para casi todo x . Entonces

$$\int_0^t f(s) dW_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s df(s)$$

Hasta este momento tenemos que si $\sigma(x, t) \in \Gamma$ entonces la integral de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(\omega, s) dW_s, t \geq 0$$

es siempre una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t^{(n)}$.

Si X_t y Y_t son procesos de Itô, entonces

$$d(X_t Y_t) = dX_t Y_t + X_t dY_t + dX_t dY_t$$

y de ahí se deduce la fórmula general de integración por partes:

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s$$

Ejemplo 2.2.4. . Demuestre la fórmula

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{W_t^3}{3} - \int_0^t W_s ds$$

$X_t = W_t^2$ y $Y_t = W_t$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t W_s^2 dW_t &= W_t^3 - \int_0^t W_s dW_s^2 - \int_0^t dW_s^2 dW_s \\ &= W_t^3 - \int_0^t W_s (2W_s dW_s + ds) - \int_0^t (2W_s dW_s + ds) dW_s \\ &= W_t^3 - 2 \int_0^t W_s^2 dW_s - \int_0^t W_s dt - 2 \int_0^t W_s dt \\ &= W_t^3 - 2 \int_0^t W_s^2 dW_s - 3 \int_0^t W_s dt \end{aligned}$$

El resultado sigue de despejar la integral $\int_0^t W_s^2 dW_t$.

2.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas

2.3.1. Planteamiento general. Cálculo de la media y la varianza de la ecuación

Definición 2.3.1. Definición 1. Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una ecuación de la forma

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_{t_0} = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty \quad (2.7)$$

La forma integral de la ecuación (2.7) está dada por

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad (2.8)$$

La media y la varianza de la ecuación (2.8)

Para las aplicaciones, la información más importante que necesitamos saber de un proceso es la media y la varianza.

Tomando la esperanza en (2.8) y usando la propiedad de que la media de la integral de Itô es cero obtenemos

$$E[X_t] = x_0 + \int_0^t E[b(s, X_s)] ds \quad (2.9)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo estocástico obtenemos

$$\frac{d}{dt} E[X_t] = E[b(s, X_s)] \quad (2.10)$$

En algunos casos la ecuación (2.10) se puede resolver de manera exacta. A continuación mostramos algunos ejemplos.

1. Si $b(t, X_t) = b(t)$, entonces $\frac{d}{dt} E[X(t)] = b(t)$ e integrando con respecto a t obtenemos $E[X_t] = x_0 + \int_0^s b(s) ds$.
2. Si $b(t, X_t) = \alpha(t) X_t + \beta(t)$, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ funciones determinísticas continuas, entonces

$$\frac{d}{dt} E[X_t] = \alpha(t) E[X_t] + \beta(t)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal en la variable $E(X_t)$ cuya solución es

$$E[X_t] = e^{A(t)} \left(X_0 + \int_0^t e^{-A(s)} \beta(s) ds \right), \text{ donde } A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$$

3. Si X_t es un proceso que satisface la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \alpha(t) X_t dt + \sigma(t) dW_t$ entonces la media y la varianza de X_t están dadas por

$$E[X_t] = e^{A(t)} X_0$$

$$Var[X_t] = e^{2A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} \sigma^2(s) ds,$$

donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$.

2.3.2. Existencia y unicidad de la solución. La solución como proceso de Markov y de difusión

Teorema 2.3.1. (*Teorema de existencia y unicidad*). Sea $T > 0$ y sean $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ funciones medible que satisfacen las siguientes condiciones:

- a) Condición de Lipschitz: $|b(t, X_t) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$
- b) Restricción de crecimiento: $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$.

Entonces la ecuación (2.1) tiene en $[0, T]$ una única solución X_t y con valores en \mathbb{R}^n , continua con probabilidad 1, que satisface la condición inicial $X_{t_0} = x_0$; es decir, si X_t y Y_t son soluciones de la ecuación (2.1) con el mismo valor inicial x_0 , entonces

$$P \left[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| > 0 \right] = 0$$

Los teorema que se muestran a continuación caracterizan la solución de la ecuación diferencial (2.7) que satisfacen el teorema anterior.

Teorema 2.3.2. . Para la ecuación diferencial estocástica (2.7), con la condición inicial $X_{t_0} = x_0$, independiente de $W_t - W_{t_0}$, para $t \geq t_0$. Si la ecuación satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad, entonces la solución X_t de la ecuación para valores iniciales arbitrarios es un proceso de Markov en el intervalo $[t_0, T]$ cuya función de distribución inicial en el instante t_0 es la distribución de x_0 y con probabilidades de transición dadas por

$$P(s, x, t, B) = P(X_t \in B | X_s = x) = P[X_t(s, x) \in B],$$

donde $X_t(s, x)$ es la solución de la ecuación

$$X_t = x + \int_{t_0}^t b(u, X_u) du + \int_{t_0}^t \sigma(u, X_u) dW_u, \quad t_0 \leq s \leq t \leq T$$

Teorema 2.3.3. . Suponga que las condiciones del teorema de existencia y unicidad se verifican para la ecuación (2.1) con la condición inicial $X_{t_0} = x_0$, independiente de $W_t - W_{t_0}$. Si $b(t, x) = b(x)$ y $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ en el intervalo $[t_0, T]$, entonces la solución X_t es, para el valor inicial arbitrario x_0 , un proceso de Markov homogéneo con probabilidades de transición (estacionario)

$$P(X_t \in B | X_{t_0} = x) = P(t - t_0, x, B) = P[X_t(t_0, x) \in B],$$

donde $X_t(t_0, x)$ es la solución de la ecuación (1), con la condición inicial $X_{t_0} = x$.

Teorema 2.3.4. . Suponga que las condiciones del teorema de existencia y unicidad se verifican para la ecuación (2.1), con la condición inicial $X_{t_0} = x_0$, $t_0 \leq t \leq T$. Si además, b y σ tienen trayectorias continuas, entonces la solución X_t de (2.7) es un proceso de difusión en $[t_0, T]$ con deriva (drift) $A_1(t, x) = b(t, x)$ y difusión $A_2(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^t(t, x)$.

2.3.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Definición 2.3.2. . Una ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (2.11)$$

para el proceso n -dimensional X_t en el intervalo $[t_0, T]$ es lineal si las funciones $b(t, X_t)$ y $\sigma(t, X_t)$ son funciones lineales de x en $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$, es decir, si la ecuación diferencial (2.11) es de la forma

$$dX_t = (A(t)x + a(t))dt + (C(t)x + c(t))dW_t \quad (2.12)$$

La ecuación diferencial (2.12) se dice que es homogénea si $a(t) = c(t) = 0$. Si $C(t) = 0$ decimos que la ecuación es lineal en el sentido estricto.

Teorema 2.3.5. . Considere la ecuación diferencial lineal (2.9), definida en $[t_0, T]$, y con la condición inicial $X_{t_0} = x_0$, independiente de $W(t) - W(t_0)$. Si las funciones A , a , C y c son medibles y acotadas en $[t_0, T]$, entonces existe una única solución de la ecuación. Además, si la condición se verifica para todo subintervalo de $[t_0, \infty)$, la ecuación tiene solución global en $[t_0, \infty)$.

Corolario 2.3.1. . Considere la ecuación diferencial lineal (2.12). Si A , a , C y c son constantes, entonces siempre existe una solución global.

A continuación se presenta la solución de la ecuación diferencial (2.12) cuando $C(t) = 0$.

Teorema 2.3.6. . La ecuación diferencial

$$dX_t = (A(t)x + a(t))dt + c(t)dW_t, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2.13)$$

tiene solución

$$X_t = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) a(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) c(s) dW_s \right), \quad (2.14)$$

donde $\Phi(t)$ es la solución de la ecuación diferencial ordinaria $X'_t = A(t)X_t$.

Prueba. Sea

$$Y_t = x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) a(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) c(s) dW_s$$

Entonces, Y_t es un proceso de Itô con diferencial

$$\begin{aligned} dY_t &= \Phi^{-1}(t) a(t) dt + \Phi^{-1}(t) c(t) dW_t \\ &= \Phi^{-1}(t) [a(t) dt + c(t) dW_t] \end{aligned}$$

Por el teorema de Itô $X_t = \Phi(t) Y_t$ es también un proceso de Itô y verifica que

$$\begin{aligned} dX_t &= \Phi'(t) Y_t dt + \Phi(t) dY_t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (dY_t)^2 \\ &= A(t) \Phi(t) Y_t dt + \Phi(t) \Phi^{-1}(t) [a(t) dt + c(t) dW_t] \\ &= [A(t) X_t + a(t)] dt + c(t) dW_t \end{aligned}$$

En particular, si $A(t) = A$, es decir, A es constante, entonces (2.14) toma la forma

$$X_t = e^{A(t-t_0)} c + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} (a(s) ds + c(s) dW_s)$$

y en general,

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \left[x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^u A(u) du\right) [a(s) ds + B(s) dW_s] \right]$$

Aemás, si $E[|x_0|] < \infty$, la solución tiene momentos de segundo orden y se pueden calcular como se muestra a continuación:

Teorema 2.3.7. . Sea X_t la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = (A(t) X_t + a(t)) dt + c(t) dW_t, \quad X_{t_0} = x_0 \quad (2.15)$$

y suponga que $E[|x_0|^2] < \infty$. Entonces

(a)

$$m_t = E[X_t] = \Phi(t) \left(E[X_0] + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) a(s) ds \right) \quad (2.16)$$

Por lo tanto, m_t es la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$m'_t = A(t) m_t + a(t), \quad m_{t_0} = x_0$$

(b)

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \text{Cov}[X_s, X_t] \\ &= \Phi(s) \left(\text{Cov}[x_0] + \int_{t_0}^{\min(s,t)} \Phi^{-1}(u) c(u) c^t(u) (\Phi^{-1}(u))^t du \right) \Phi^t(t) \end{aligned} \quad (2.17) \quad (A14)$$

En particular, $K(t) = \text{Cov}[X_t]$ es solución de la ecuación diferencial

$$K'(t) = A(t) K(t) + K(t) A^t(t) + c(t) c^t(t), \quad K(t_0) = \text{Cov}[x_0]$$

El siguiente teorema caracteriza la solución de la ecuación diferencial (2.13).

Teorema 2.3.8. . La solución (2.14) de la ecuación diferencial (2.15) es un proceso Gaussiano X_t si y solo si x_0 tiene distribución gaussiano o es constante. La media m_t y la covarianza están dados por (2.16) y (2.17), respectivamente. El proceso X_t tiene incrementos independientes si y solo si x_0 es constante o $A(t) = 0$, para todo $t \in [t_0, T]$ (o sea, $\Phi(t) = I$, para todo $t \in [t_0, T]$). Además el proceso es gaussiano y estacionario si la función $A(t) = A$, $c(t) = c$ y $a(t) = 0$, para todo $t \in [t_0, T]$, los valores propios de A tienen parte real negativa y x_0 es normal de media cero o covarianza K , con K la solución

$$K = \int_0^\infty e^{At} c c^t e^{A^t t} dt$$

de la ecuación $A(t) K(t) + K(t) A^t(t) = -c(t) c^t(t)$. En tal caso, el proceso verifica $E[X_t] = 0$ y

$$\text{Cov}[X_t X_s] = \begin{cases} e^{A(s-t)} K, & s \geq t \geq t_0 \\ K e^{A^t(s-t)}, & t \geq s \geq t_0 \end{cases}$$

2.3.4. Algunas técnicas de resolución.

2.3.4.1. Si $b(t, X_t) = b(t)$ y $\sigma(t, X_t) = \sigma(t)$

En este caso la solución de la ecuación diferencial (A4) tiene distribución gaussiana con media $X_0 + \int_0^t b(s) ds$ y varianza $\int_0^t \sigma^2(s) ds$.

Ejemplo 2.3.1. . Resuelva la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \frac{t}{t^2 + 1} dt + \sqrt{t} dW_t$, $X_0 = 0$.

Calculamos la media y la varianza:

- *Media:* $X_0 + \int_0^t b(s) ds = \int_0^t \frac{t}{t^2 + 1} ds = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)$
- *Varianza:* $\int_0^t \sigma^2(s) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$.

Por lo tanto $X_t \rightsquigarrow N\left(\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1), \frac{t^2}{2}\right)$

Si $b(t, X_t) = b(t, W_t)$ y $\sigma(t, X_t) = \sigma(t, W_t)$ entonces la solución de la ecuación diferencial (2.1) está dada por

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, W_s) ds + \int_0^t \sigma^2(s, W_s) dW_s$$

Ejemplo 2.3.2. . Resuelva la ecuación diferencial estocástica $e^{t/2} dX_t = dt + e^{W_t} dW_t$, con $X_0 = 0$.

Multiplicando la ecuación por $e^{-t/2}$ e integrando obtenemos

$$X_t = \int_0^t e^{-s/2} ds + \int_0^t e^{-s/2 + W_s} dW_s$$

Aplicando la fórmula $\int_0^T e^{-\frac{\lambda^2 t}{2} \pm \lambda W_t} dt = \pm \frac{1}{\lambda} \left(e^{-\frac{\lambda^2 T}{2} \pm \lambda W_T} - 1 \right)$ vemos que la solución está dada por

$$\begin{aligned} X_t &= -2 \left(e^{-t/2} - 1 \right) + \left(e^{-t/2 + W_t} - 1 \right) \\ &= -2e^{-t/2} + e^{-t/2 + W_t} + 1 \\ &= e^{-t/2} (e^{W_t} - 2) + 1 \end{aligned}$$

2.3.4.2. Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 2.3.3. . La EDE

$$dX_t = b(t, W_t) dt + \sigma(t, W_t) dW_t \quad (2.18)$$

es llamada exacta si existe una función diferenciable $f(t, x)$ tal que

$$b(t, W_t) = \partial_t f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t, x) \quad (2.19)$$

$$\sigma(t, x) = \partial_x f(t, x) \quad (2.20)$$

Ahora, suponga que la ecuación (2.18) es exacta, entonces sustituyendo (2.19) y (2.20) en (2.18) se tiene

$$dX_t = \left(\partial_t f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t, x) \right) dt + \partial_x f(t, x) dW_t$$

Aplicando la fórmula de Itô se tiene que

$$dX_t = d(f(t, W_t))$$

lo cual implica que $X_t = f(t, X_t) + c$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (2.19) y (2.20) requiere los siguientes pasos:

1. Integre parcialmente la ecuación (2.20) con respecto a x para obtener $f(t, x)$ con una constante aditiva $T(t)$.
2. Sustituya en la primera ecuación y determine la función $T(t)$.
3. La solución es $X_t = f(t, W_t) + c$, con c determinada por la condición inicial.

Ejemplo 2.3.3. . Resuelva la ecuación diferencial estocástica $dX_t = e^t (1 + W_t^2) dt + (1 + 2e^t W_t) dW_t$, con $X_0 = 0$.

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t, x) = e^t (1 + x^2) \\ \partial_x f(t, x) = 1 + 2e^t x \end{cases}$$

Integrando la segunda ecuación con respecto a x obtenemos

$$f(t, x) = x + e^t x^2 + T(t)$$

Ahora, $\partial_t f(t, x) = e^t x^2 + T'(t)$, $\partial_x^2 f = 2e^t$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} e^t x^2 + T'(t) + e^t &= e^t (1 + x^2) = e^t + e^t x^2 \\ \Rightarrow T'(t) &= 0 \\ \Rightarrow T(t) &= c \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(t, x) = x + e^t x^2 + c$ y $X_t = f(t, W_t) = W_t + e^t W_t^2 + c$. Como $X_0 = 0$, entonces $c = 0$ y la solución de la ecuación es $X_t = W_t + e^t W_t^2$.

Teorema 2.3.9. . Si la ecuación diferencial estocástica (2.18) es exacta, entonces las funciones $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ satisfacen la condición

$$\partial_x b(t, x) = \partial_t \sigma(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x^2 \sigma(t, x) \quad (2.21)$$

Es importante notar que la condición (2.21) es una condición necesaria para que la ecuación (2.18) sea exacta.

2.3.4.3. Integración por inspección

El método de inspección consiste en ver la posibilidad de aplicar las fórmulas del producto o cociente dadas por

$$d[f(t) X_t] = f'(t) X_t dt + f(t) dX_t$$

$$d\left(\frac{X_t}{f(t)}\right) = \frac{f(t) dX_t - f'(t) X_t dt}{f(t)^2}$$

Así, si la ecuación diferencial estocástica se puede escribir en la forma

$$dX_t = f'(t) X_t dt + f(t) dW_t$$

entonces se verifica que

$$dX_t = d[f(t) X_t]$$

e integrando obtenemos que la solución está dada por

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) X_s ds$$

Ejemplo 2.3.4. . Resuelva la ecuación diferencial estocástica $e^{-2t} dX_t = (1 + 2W_t^2) dt + 2W_t dW_t$.

Multiplicando la ecuación diferencial por e^{2t} obtenemos

$$dX_t = e^{2t} (1 + 2W_t^2) dt + 2e^{2t} dW_t$$

Reagrupando obtenemos

$$dX_t = (2e^{2t} W_t^2) dt + e^{2t} (2W_t dW_t + dt)$$

Dado que $d(e^{2t}) = 2e^{2t} dt$ y $d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt$, aplicando la fórmula del producto la ecuación toma la forma

$$dX_t = d[e^{2t} W_t^2]$$

Así, la solución de la ecuación está dada por

$$X_t = e^{2t} W_t^2 + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.3.5. . Resuelva la ecuación diferencial estocástica $t^3 dX_t = (3t^2 X_t + t) dt + t^6 dW_t$, con $X_1 = 0$.

Reescribiendo la ecuación y luego multiplicando por t^6 obtenemos

$$\frac{t^3 dX_t - d(t^3) X_t}{(t^3)^2} = d\left(-\frac{t^{-4}}{4}\right) + dW_t$$

Aplicando la fórmula del cociente la ecuación toma la forma

$$d\left(\frac{X_t}{t^3}\right) = -d\left(\frac{t^{-4}}{4}\right) + dW_t$$

Integrando de 1 a t obtenemos

$$\frac{X_t}{t^3} = -\frac{t^{-4}}{4} + c + W_t - W_1$$

Como $X_1 = 0$ se tiene que $c = 1/4$ y por lo tanto la solución es

$$X_t = \frac{t^{-1}}{4} + \frac{t^3}{4} + W_t - W_1$$

2.3.4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Considere la ecuación diferencial estocástico (2.7) con $b(t, X_t) = \alpha(t) X_t + \beta(t)$, es decir,

$$dX_t = [\alpha(t) X_t + \beta(t)] dt + \sigma(t, W_t) dW_t \quad (2.22)$$

La cual reescribimos como

$$dX_t - \alpha(t) X_t dt = \beta(t) dt + \sigma(t, W_t) dW_t$$

Sea $A = \int_0^t \alpha(s) ds$. Multiplicando la ecuación anterior por el factor integrante $e^{-A(t)}$ y aplicando la fórmula del producto, obtenemos

$$d\left[e^{-A(t)} X_t\right] = e^{-A(t)} \beta(t) dt + e^{-A(t)} \sigma(t, W_t) dW_t$$

Integrando nos da

$$e^{-A(t)} X_t = \int_0^t e^{-A(s)} \beta(s) ds + \int_0^t e^{-A(s)} \sigma(s, W_s) dW_s$$

Veamos algunos casos particulares:

- Si $\sigma(t, W_t) = \sigma(t)$, entonces la solución de la ecuación (A19) es gaussiana con media y varianza dadas por

$$E[X_t] = X_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} \sigma(s) ds$$

$$Var[X_t] = e^{2A(t)} \int_0^t e^{-2A(s)} \sigma(s) ds$$

- Si α y β son constantes, con $\alpha \neq 0$, y $\sigma(t, W_t) = \sigma(t)$, entonces la solución de la ecuación diferencial está dada por

$$X_t = X_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \sigma(s) dW_s$$

Ejemplo 2.3.6. (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media). Muestre que la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = (m - X_t) dt + \alpha dW_t$$

está dada por

$$X_t = m + (X_0 - m) e^{-t} + \alpha \int_0^t e^{s-t} dW_s$$

Además, X_t es gaussiana con media y varianza dadas por

$$E[X_t] = m + (X_0 - m) e^{-t}$$

$$Var[X_t] = \frac{\alpha^2}{2} (1 - e^{-2t}).$$

Sumando a ambos lados $X_t dt$ y multiplicando por el factor integrante e^t obtenemos

$$e^t [X_t dt + dX_t] = me^t dt + \alpha e^t dW_t$$

Aplicando la fórmula del producto la ecuación anterior toma la forma

$$d[e^t X_t] = me^t dt + \alpha e^t dW_t$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} e^t X_t &= X_0 + m \int_0^t e^s ds + \alpha \int_0^t e^s dW_s \\ &= X_0 + m(e^t - 1) + \alpha \int_0^t e^s dW_s \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 e^{-t} + m(1 - e^{-t}) + \alpha \int_0^t e^{s-t} dW_s \\ &= m + e^{-t}(X_0 - m) + \alpha \int_0^t e^{s-t} dW_s \end{aligned}$$

Dado que X_t es la suma de una función de t y una de forma $\int_0^t f(s) dW_s$, entonces, por el teorema (8) de la sección anterior, X_t es gaussiana con media y varianza

$$E[X_t] = m + e^{-t}(X_0 - m) + \alpha E \left[\int_0^t e^{s-t} dW_s \right] = m + e^{-t}(X_0 - m)$$

$$\begin{aligned} Var[X_t] &= Var \left[\alpha \int_0^t e^{s-t} dW_s \right] = \alpha^2 e^{-2t} \int_0^t e^{2s} ds = \frac{\alpha^2 e^{-2t}}{2} [e^{2t} - 1] \\ &= \frac{\alpha^2}{2} [1 - e^{-2t}] \end{aligned}$$

2.3.4.5. Método de variación de parámetros

Considere la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \alpha X_t dW_t, \text{ con } \alpha \quad (2.23)$$

Multiplicando la ecuación por $1/X_t$ obtenemos

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha dW_t$$

la cual tiene la forma integral

$$\int \frac{dX_t}{X_t} = \int \alpha dW_t$$

Integrando se obtiene

$$\ln [X_t] = \alpha W_t + c, \text{ con } c \text{ la constante de integración}$$

Esto nos da la solución

$$X_t = e^{\alpha W_t + c(t)} \quad (2.24)$$

El problema de la solución anterior es que no satisface la ecuación diferencial (2.23) para c arbitrario. Por lo tanto, debemos encontrar una función $c = c(t)$ apropiada.

Utilizando la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} dX_t &= d \left[e^{\alpha W_t + c(t)} \right] = e^{\alpha W_t + c(t)} \left[c'(t) + \frac{\alpha^2}{2} \right] dt + \alpha e^{\alpha W_t + c(t)} dW_t \\ &= X_t \left[c'(t) + \frac{\alpha^2}{2} \right] + \alpha X_t dW_t \end{aligned}$$

Como $\alpha X_t dW_t = dX_t$ (por ecuación (2.23)), entonces sustituyendo en la expresión anterior nos da

$$dX_t = X_t \left[c'(t) + \frac{\alpha^2}{2} \right] + dX_t$$

lo cual implica que

$$c'(t) + \frac{\alpha^2}{2} = 0$$

y cuya solución es

$$c(t) = -\frac{\alpha^2}{2}t + k$$

Sustituyendo en (2.24) obtenemos

$$X_t = e^{\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t + k}$$

Tomando $t = 0$ vemos que $X_0 = e^k$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación (2.23) está dada por

$$X_t = X_0 e^{\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$$

Ejemplo. Utilice el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, con μ y σ constantes.

Multiplicando la ecuación por $1/X_t$, obtenemos la ecuación en la forma integral equivalente

$$\int \frac{dX_t}{X_t} = \int \mu dt + \int \sigma dW_t$$

Integrando nos da

$$\ln(X_t) = \mu t + \sigma W_t + c, \text{ con } c \text{ la constante de integración}$$

Lo cual implica que

$$X_t = e^{\mu t + \sigma W_t + c}$$

Suponga que $c = c(t)$. Aplicando la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} dX_t &= e^{\mu t + \sigma W_t + c(t)} \left[\mu + c'(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + e^{\mu t + \sigma W_t + c(t)} \sigma dW_t \\ &= X_t \left[\mu + c'(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right] + \sigma X_t dW_t \end{aligned}$$

Restando la ecuación inicial nos da

$$c'(t) + \frac{\sigma^2}{2} = 0$$

y, por lo tanto,

$$c(t) = -\frac{\sigma^2}{2}t + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Finalmente, sustituyendo la expresión anterior en $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t + c}$ tenemos que la solución de la ecuación está dada por

$$X_t = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

2.3.4.6. Factores integrantes

El método de factores integrantes puede ser aplicado a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t) X(t) dW_t,$$

donde f y g son funciones determinística continuas. El factor integrante está dado por

$$\rho_t = e^{-\int_{t_0}^t g(s) dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t g^2(s) ds}$$

Al multiplicar la ecuación por el factor integrante la ecuación toma la forma

$$d(\rho_t X_t) = \rho_t f(t, X_t) dt.$$

Sustituyendo $Y_t = \rho_t X_t$, obtenemos que Y_t satisface la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$dY_t = \rho_t f\left(t, \frac{Y_t}{\rho_t}\right) dt$$

la cual se puede resolver por integración, o bien, como una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo (Proceso Logístico Clásico). Considere la ecuación diferencial $dX_t = (\alpha X_t - \beta X_t^2) dt + \sigma X_t dW_t$. En este caso tenemos que $f(x, t) = \alpha x - \beta x^2$ y $g(t) = \sigma$.

Ahora, el factor integrante es $\rho_t = e^{-\int_{t_0}^t \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2 ds} = e^{-\sigma(W_t - W_0) + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0)}$ y, luego del cambio de variable $Y_t = \rho_t X_t$, el problema se reduce a resolver la EDO

$$\begin{aligned} dY_t &= \rho_t f\left(t, \frac{Y_t}{\rho_t}\right) \\ dY_t &= \rho_t \left(\alpha \frac{Y_t}{\rho_t} - \beta \frac{Y_t^2}{\rho_t^2} \right) \\ dY_t &= \alpha Y_t - \frac{\beta}{\rho_t} Y_t^2 \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{1}{Y_t^2}$ y haciendo el cambio de variable $Z_t = \frac{1}{Y_t}$, obtenemos la ED

$$\begin{aligned} -dZ_t &= \alpha Z_t - \frac{\beta}{\rho_t} \\ dZ_t + \alpha Z_t &= \frac{\beta}{\rho_t} \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} Z_t &= e^{-\int_{t_0}^t \alpha ds} \left[z_0 + \int_{t_0}^t \frac{\beta}{\rho_s} e^{\int_{t_0}^s \alpha du} ds \right] \\ &= e^{-\alpha(t-t_0)} \left[z_0 + \beta \int_{t_0}^t e^{\sigma(W_s - W_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t_0)} ds \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y_t = \frac{Y_0 e^{\alpha(t-t_0)}}{1 + \beta Y_0 \int_{t_0}^t e^{\sigma(W_s - W_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t_0)} ds}$$

y $e^{-\sigma(W_t - W_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)}$

$$X_t = \frac{X_0 e^{\sigma(W_t - W_s) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0)}}{1 + \beta Y_0 \int_{t_0}^t e^{\sigma(W_s - W_0) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t_0)} ds}$$

Procesos de difusión basados en fenómenos de crecimiento

3.1. Planteamiento general

A través de los años muchos investigadores se han dedicado al modelado de sistemas dinámicos relacionados con los fenómenos de crecimiento. Tradicionalmente, los modelos utilizados para estos fines han sido deterministas y se han obtenido a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre estos modelos, se destacan los asociados con curvas de crecimiento sigmoideas: muestran un crecimiento lento al principio, seguido de un rápido (exponencial) crecimiento que se ralentiza gradualmente hasta alcanzar un valor de equilibrio (normalmente denominado capacidad de carga o nivel de saturación). Los modelos clásicos de Malthus, logístico y Gompertz dieron camino a otros, entre los que podemos mencionar a Von Bertalanffy y Richards.

Actualmente, la necesidad de modelar los fenómenos de crecimiento ha llevado a dos líneas de investigación en auge: la generalización de modelos clásicos e introducción de nuevos. Entre estos, podemos citar a Koya y Goshu [9, 10] que presentaron un modelo que incluye las formas clásicas más comúnmente utilizadas para modelar el crecimiento biológico como un caso particular, a Bürger et al. [4] quienes propusieron generalizaciones de los modelos logístico y de Gompertz y las aplicó al estudio de brotes epidémicos y, a Tabatabai et al. [22] quienes introdujeron las curvas hipérbolasticas, que han demostrado ser de gran utilidad en el estudio de la evolución de los procesos tumorales y el crecimiento de células madre [21].

No obstante, los modelos mencionados anteriormente son deterministas y no incluyen otra información además de lo proporcionado por la variable en estudio. El propósito de incluir las fluctuaciones o perturbaciones que podría existir en el sistema, llevó a considerar de ecuaciones diferenciales estocásticas, cuya solución son procesos de difusión estocástica. Feller fue el primer

autor en hacerlo, circunscribiéndolo al campo logístico a pesar de que no se pudo obtener ninguna expresión de las funciones de transición de probabilidad para el proceso resultante. Posteriormente, se construyeron otros procesos logísticos cambiando el término de volatilidad de la ecuación diferencial estocástica [23].

3.2. El proceso lognormal como generador de procesos de crecimiento

Entre los procesos de difusión obtenidos con la metodología citada en la sección anterior, se encuentra el proceso de difusión lognormal, el cual se ha utilizado comúnmente en varios campos científicos en los que la variable considerada muestra una tendencia exponencial. Por ejemplo, en estudios de crecimiento de poblaciones en ecología, para modelar variables dinámicas asociadas a modelos de Black-Scholes en economía, entre otros.

El proceso de difusión logarítmico-normal no homogéneo, también llamado proceso de difusión lognormal con factores exógenos, es definido por un proceso de difusión $\{X_t : t_0 \leq t \leq T\}$, tomando valores en \mathbb{R}^+ , con momentos infinitesimales

$$A_1(t, x) = h(t)x$$

$$A_2(t, x) = \sigma^2 x^2,$$

donde $h(t)$ es una función continua en $[t_0, T]$ y $\sigma > 0$, y con una distribución inicial degenerada, es decir $P[X_{t_0} = x_0] = 1$, o lognormal $\Lambda_1(\mu_0, \sigma_0)$.

Entre las principales razones para incluir la función $h(t)$ en la media infinitesimal del proceso homogéneo, es que permite representar factores externos que dependen del tiempo e influyen en el comportamiento de la variable en estudio (variable exógena) porque afectan la deriva (*drift*) del proceso. Por otra parte, la consideración de funciones $h(t)$ particulares ha permitido definir procesos de difusión asociados a expresiones alternativas de curvas de crecimiento ya conocidas tales como el proceso tipo Gompertz, el proceso de difusión generalizado de von Bertalanffy, el proceso logístico y el proceso de difusión tipo Richards.

Este proceso es la solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$\begin{aligned}dX_t &= h(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_{t_0} &= x_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde W_t es un proceso de Wiener estándar independiente de X_{t_0} .

La EDE (1) se puede obtener de la EDO

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(t) x(t)\tag{3.2}$$

la cual se puede ver como una generalización del proceso de crecimiento Maltusiano con una tasa de fecundidad dependiente del tiempo $h(t)$. Reemplazando en la ecuación (3.2) $h(t)$ por $h(t) + \Lambda(t)$, donde $\Lambda(t)$ es un ruido blanco con varianza σ^2 , se obtiene una ecuación de Langevin que, reescribiéndola como una ecuación diferencial estocástica, resulta la ecuación (3.1).

3.3. Solución de la ecuación diferencial (3.1) y principales características del proceso

Antes de resolver la ecuación diferencial (3.1) veamos que satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Para esto, sean $b(x, t) = h(t)x$ y $\sigma(x, t) = \sigma x$.

- Dado que $b(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ son funciones continuas entonces son medibles.
- Como $h(t)$ es continua en el intervalo $[t_0, T]$, entonces existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq h(t) \leq \beta$.

Así,

$$\begin{aligned}|b(x, t) - b(y, t)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &= |h(t)x - h(t)y| + |\sigma x - \sigma y| \\ &= |h(t)||x - y| + \sigma|x - y| \\ &\leq (|M| + \sigma)|x - y|\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |b(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 &= |h(t)x|^2 + |\sigma x|^2 \\ &\leq (|h(t)|^2 + |\sigma|^2) |x|^2 \\ &< (|h(t)|^2 + \sigma^2) (1 + |x|^2) \end{aligned}$$

Tomando $K = \max(|M| + \sigma, |h(t)|^2 + \sigma^2)$ obtenemos que las funciones $b(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ satisfacen las condiciones de Lipschitz y de restricción sobre el crecimiento.

Para resolver la EDE, lo haremos de dos maneras: usando la técnica del factor integrante y otra a través de un cambio de variable junto con la fórmula de Itô. Los detalles se muestran a continuación.

■ **Método del factor integrante:**

El factor integrante está dado por

$$\rho_t = e^{-\int_{t_0}^t \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma^2 ds} = e^{-\sigma(W_t - W_{t_0}) + \frac{1}{2} \sigma^2(t - t_0)}$$

Al multiplicar la ecuación por el factor integrante, la ecuación toma la forma

$$d(\rho_t X_t) = \rho_t h(t) X_t$$

Luego, realizando el cambio de variable $Y_t = \rho_t X_t$, la ecuación anterior se transforma en la EDO

$$dY_t = h(t) Y_t$$

Multiplicando por $1/Y_t$ e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{dY_t}{Y_t} &= \int_{t_0}^t h(s) ds \\ \ln \left| \frac{Y_t}{Y_0} \right| &= \int_{t_0}^t h(s) ds \end{aligned}$$

$$Y_t = Y_0 e^{\int_{t_0}^t h(s) ds}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$X_t = X_0 \rho_t e^{\int_{t_0}^t h(s) ds} = X_0 \exp \left(\int_{t_0}^t h(s) ds + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0) - \sigma (W_t - W_{t_0}) \right) \quad (3.3)$$

- **A través del cambio de variable** $Y_t = g(t, X_t) = \ln(X_t)$:

Aplicando, la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2 \\ &= 0 + \frac{1}{X_t} [h(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t] + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{X_t^2} [\sigma^2 X_t^2 dt] \\ &= h(t) dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left[h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$Y_t = Y_0 + \int_{t_0}^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) + \sigma [W_t - W_0]$$

Por otra parte, como Y_0 tiene distribución gaussiana entonces el proceso Y_t es gaussiano por teorema 8 de la sección 2.3.2. En general, por la caracterización de la ley normal multivariante, para $t_1, \dots, t_n \in [t_0, T]$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el vector $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})^t$ tiene distribución normal multivariante.

Por los teoremas 7 y 8 de la sección 2.3.2, se obtiene que la media y la varianza del proceso Y_t están dadas por:

- Media: $\mu(t) = E[Y_0] + \int_{t_0}^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0)$
- Covarianza: $K(s, t) = Cov[X_s, X_t] = \sigma_0^2 + \sigma^2 [\text{mín}(s, t) - t_0]$ con $\sigma_0^2 = Cov[\ln(x_0)]$

respectivamente.

Finalmente, como $X_t = e^{Y(t)}$ entonces la solución de la ecuación (3.1) esta dada por

$$X_t = x_0 e^{\int_{t_0}^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) + \sigma[W_t - W_{t_0}]}$$

y tiene distribución lognormal.

En general, si la condición inicial es degenerada o lognormal, entonces todas las distribuciones finito-dimensionales son lognormales. Es decir, \mathbb{N} , si $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, se verifica

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^t \rightsquigarrow \Lambda(\mu, \Sigma)$$

donde

$$\mu = \left(\mu_0 + \int_{t_0}^{t_1} h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2}(t_1 - t_0), \dots, \mu_0 + \int_{t_0}^{t_n} h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2}(t_n - t_0) \right), \text{ con } \mu_0 = E[x_0]$$

$$\text{y } \Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}, \text{ con } \sigma_{ij} = \sigma_0^2 + \sigma^2 [\text{mín}(t_i, t_j) - t_0].$$

A continuación calculamos la distribución de transición:

Tenemos que $(X_s, X_t) \rightsquigarrow \Lambda_2(\mu, \Sigma)$, donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 + \int_{t_0}^s h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2}(s - t_0) \\ \mu_0 + \int_{t_0}^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 + \sigma^2 [s - t_0] & \sigma_0^2 + \sigma^2 [\text{mín}(s, t) - t_0] \\ \sigma_0^2 + \sigma^2 [\text{mín}(s, t) - t_0] & \sigma_0^2 + \sigma^2 [t - t_0] \end{pmatrix}.$$

Así,

$$(X_t | X_s = x_s) \rightsquigarrow \Lambda_1 [\mu_t + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (\ln(x_s) - \mu_s), \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}].$$

Entonces, si $s < t$, la media y la varianza de $(X_t | X_s = x_s)$ son

$$\begin{aligned}
& \mu_0 + \int_{t_0}^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \\
& + (\sigma_0^2 + \sigma^2 [\text{mín}(s, t) - t_0]) (\sigma_0^2 + \sigma^2 [s - t_0])^{-1} \left(\ln(x_s) - \mu_0 - \int_{t_0}^s h(s) ds + \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \right) \\
& = \mu_0 + \int_{t_0}^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) + \ln(x_s) - \mu_0 - \int_{t_0}^s h(s) ds + \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \\
& = \ln(x_s) + \int_s^t h(s) ds - \frac{\sigma^2}{2} (t - s)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \sigma_0^2 + \sigma^2 [t - t_0] - (\sigma_0^2 + \sigma^2 [s - t_0]) (\sigma_0^2 + \sigma^2 [s - t_0])^{-1} (\sigma_0^2 + \sigma^2 [s - t_0]) \\
& = \sigma_0^2 + \sigma^2 [t - t_0] - \sigma_0^2 - \sigma^2 [s - t_0] = \sigma^2 (t - s),
\end{aligned}$$

respectivamente.

De lo anterior, obtenemos que la función de densidad de transición es:

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \int_s^t h(u) du + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right)$$

Una vez calculada la distribución finito dimensional, las principales características del proceso pueden ser obtenidas. Algunas de las principales características del proceso pueden ser formuladas conjuntamente para las condiciones iniciales degenerada y lognormal con la siguiente función:

$$G^\lambda(t|y, \tau) = M(t|y, \tau)^{\lambda_1} \exp\left(\lambda_2 (\lambda_3 \sigma_0^2 + \sigma^2 (t - \tau))^{\lambda_4}\right),$$

con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^t$ y donde

$$M(t|y, \tau) = \exp\left(\int_\tau^t h(u) du + y - \frac{\sigma^2(t-\tau)}{2}\right)$$

La siguiente tabla resume las diferentes funciones de acuerdo a los valores de λ , τ y y :

Función	Expresión	y	τ	λ
n-ésimo momento	$E[X_t^n]$	μ_0	t_0	$(n, n^2/2, 1, 1)^t$
n-ésimo momento condicional	$E[X_t^n X_s = x_s]$	$\ln(x_s)$	s	$(n, n^2/2, 0, 1)^t$
moda	$Moda[X_t]$	μ_0	t_0	$(1, -1, 1, 1)^t$
moda condicional	$Moda[X_t X_s = x_s]$	$\ln(x_s)$	s	$(1, -1, 0, 1)^t$
cuantil α	$C_\alpha[X_t]$	μ_0	t_0	$(1, z_\alpha, 1, 1/2)^t$
cuantil α concional	$C_\alpha[X_t X_s = x_s]$	$\ln(x_s)$	s	$(1, z_\alpha, 0, 1/2)^t$

En la tabla anterior, z_α es el cuantil α de una distribución normal estándar.

Un aspecto importante a destacar es que la media y la media condicionada en un valor inicial x_0 verifican la ecuación diferencial (3.2), es decir,

$$\begin{aligned} m'(t) &= h(t) m(t) \\ m'(t|t_0) &= h(t) m(t|t_0) \end{aligned}$$

Esta última propiedad hace que el proceso de difusión definido por (3.1) sea capaz de modelar varios patrones de comportamiento (concretamente los que muestran un comportamiento que se ajusta a $m(t)$). Además, la función $m(t|t_0)$ permite considerar situaciones cuyas propiedades de la función media pueden depender del valor inicial.

3.4. Inferencia en el proceso de difusión lognormal no homogéneo

Vamos a suponer que las curvas de crecimiento son sigmoideas, acotadas y positivas.

Sea $f_\theta(t)$ una función positiva definida en un intervalo $[t_0, +\infty)$, que verifica las siguientes condiciones:

- a) Es continua, acotada y diferenciable.

- b) Su forma funcional depende de un parámetro $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^t$, siendo Θ el espacio paramétrico asociado.
- c) $f_\theta(t) = k(\theta) g_\theta(t)$, con $\lim_{t \uparrow \infty} g_\theta(t) = 1$.
- d) $f'_\theta(t) = f_\theta(t) h_\theta(t)$, con $h_\theta(t)$ una función continua y acotada en $[t_0, +\infty)$.
- e) f_θ presenta al menos un punto de inflexión.

La condición d) nos permite considerar un proceso de difusión logarítmica normal no homogéneo del tipo (3.3), cuya media es la función $f_\theta(t)$. Para esto, debemos considerar

$$h_\theta(t) = \frac{f'_\theta(t)}{f_\theta(t)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Note que $\lim_{t \uparrow \infty} f_\theta(t) = k(\theta)$, independiente de los valores previamente tomados por la curva. En determinadas ocasiones esta propiedad no será verificada, con el valor límite dependiendo de alguna característica de la curva como su valor inicial. Consideraremos el caso del valor límite dependiendo del valor inicial. Entonces, si $f_\theta(t_0) = x_0 = k(\theta) g_\theta(t_0)$, podemos decir que

$$f_\theta(t) = x_0 \frac{g'_\theta(t)}{g_\theta(t)}$$

En cuanto a otras características de la curva, los intervalos de crecimiento dependerán del signo de $h(t)$, mientras que los instantes de tiempo en los cuales las inflexiones se alcanzan son solución de la ecuación $h_\theta^2(t) + h'_\theta(t) = 0$. En nuestro caso solamente vamos a considerar curvas que presentan un único punto de inflexión.

3.4.1. Estimación de los parámetros del modelo

Para cada función $f_\theta(t)$ debemos construir un proceso de difusión lognormal no homogéneo tal que su media y la media condicional exhiban un patrón de comportamiento asociado con la función. Estas funciones permitirán, por ejemplo, predecir la evolución de la variable en estudio. Tales funciones son funciones paramétricas del modelo, así para su estimación máximo verosímil (MV) sólo debemos hallar sus parámetros.

Consideramos una muestra discreta del proceso, basadas en d trayectorias muestrales, para tiempos t_{ij} , con $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, n_i$, tal que $t_{i1} = t_1$, $i = 1, \dots, d$. Denotamos por $X = (X_1^t, \dots, X_d^t)^t$ el vector que contiene las variables aleatorias de la muestra, donde X_i^t incluye las variables de la i -ésima trayectoria muestral, es decir, $X_i = (X(t_{i1}), \dots, X(t_{i, n_i}))^t$, $i = 1, \dots, d$. Es importante destacar que no es necesario que los instantes de observación sean los mismos para cada trayectoria, si bien el instante inicial conviene que si lo sea ya que hay que imponer una distribución inicial.

La función de verosimilitud depende de la elección de las condiciones iniciales. Sea $f(x, t|y, s)$ la función de densidad de distribución del proceso, entonces:

- Si la condición inicial es degenerada, es decir, $P[X(t_1) = x_1] = 1$, la función de verosimilitud está dada por

$$L_x(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1})$$

- Si la condición inicial es lognormal con media μ y varianza δ^2 , es decir, $X(t_1) \rightsquigarrow \Lambda(\mu, \delta^2)$, la función de verosimilitud está dada por

$$L_x(\mu, \delta, \theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^d f_{X(t_1)}(x_{i1}) \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1})$$

En el segundo caso, hay dos parámetros adicionales que deben ser incluidos en el procedimiento de estimación. No obstante, la estimación de μ y δ sólo dependen de los valores iniciales de cada trayectoria muestral y no influyen en el resto de parámetros. Por lo tanto, la estimación máxima verosimil (ML) de θ y σ^2 son la misma en ambos casos. De ahora en adelante vamos a considerar el caso cuando la distribución inicial es lognormal.

Tenemos que la función de densidad de transición es

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \ln\left(\frac{f_\theta(s)}{f_\theta(t)}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right), \quad s < t$$

Por lo tanto, si asumimos que la distribución de $X(t_{i1})$ es lognormal $\Lambda_1(\mu, \delta^2)$, la función de densidad de probabilidad de X es

$$f_X(\mu, \delta^2, \xi) = \prod_{i=1}^d \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(x_{i1}) - \mu]^2}{2\delta^2}\right)}{x_{i1}\delta\sqrt{2\pi}} \times \prod_{j=2}^{n_i} \frac{\exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{x_{i,j+1}}{x_{ij}}\right) - \ln\left(\frac{f_\theta(t_{i,j-1})}{f_\theta(t_{ij})}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{2\sigma^2(t_{ij} - t_{i,j-1})}\right)}{x_{ij}\sigma\sqrt{2\pi}(t_{ij} - t_{i,j-1})},$$

Para determinar los estimadores de máxima verosimilitud usamos la función de log-verosimilitud.

Así, tomando $N = \sum_{i=1}^d n_i$ obtenemos

$$\begin{aligned} L_X &= -\frac{d}{2} \ln(2\pi) - \frac{d}{2} \ln(\delta^2) - \sum_{i=1}^d \ln(x_{i1}) - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(x_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{i,j-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln\left(\frac{x_{i,j+1}}{x_{ij}}\right) - \ln\left(\frac{f_\theta(t_{i,j-1})}{f_\theta(t_{ij})}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \\ &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{d}{2} \ln(\delta^2) - \frac{N-d}{2} \ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^d \ln(x_{i1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu]^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(x_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{i,j-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln\left(\frac{x_{i,j+1}}{x_{ij}}\right) - \ln\left(\frac{f_\theta(t_{i,j-1})}{f_\theta(t_{ij})}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}}. \end{aligned}$$

La estimación máximo verosimil de μ y δ^2 son fáciles de determinar. No obstante, el sistema resultante para la estimación MV de θ y σ^2 , en la mayoría de los casos, es excesivamente

complejo y en la mayoría de los casos no tiene soluciones exactas. Por lo tanto, deben emplearse procedimientos numéricos para encontrar sus soluciones aproximadas. Además, es imposible realizar un estudio general de los sistemas de ecuaciones para comprobar las condiciones de convergencia del método numérico, ya que los sistemas dependen de datos muestrales y, por tanto, pueden presentar un comportamiento imprevisible. Sumado a este problema, también debemos seleccionar una solución inicial.

Uno de los problemas fundamentales es el espacio de soluciones. En nuestro caso este espacio es $\Omega = \Theta \times \mathbb{R}^+$. Este espacio es continuo e ilimitado, lo que podría dar lugar a cálculos innecesarios y tiempos prolongados de ejecución del algoritmo. Para evitar esto, se sugieren algunas estrategias para delimitar el espacio de soluciones.

En cuanto al parámetro σ , se sabe que, cuando tiene valores altos, conduce a rutas de muestreo con gran variabilidad en torno a la media del proceso. Por lo tanto, una variabilidad excesiva en las rutas de muestreo disponibles conduciría a un modelo desaconsejable. Algunas simulaciones realizadas para varios valores han llevado a considerar que $0 < \sigma < 0.1$. En cuanto al resto de parámetros en cada uno de los casos, dada la naturaleza de las curvas bajo análisis, el primer paso sería llevar a cabo su reparametrización. Esto produce un nuevo espacio paramétrico, que a menudo es más pequeño que el original.

Ejemplo de aplicación. El proceso de difusión Hubbert

4.1. La curva de Hubbert

Desde hace varias décadas hasta la actualidad, el petróleo juega un papel fundamental en la economía mundial. Dado que el petróleo es un recurso finito y no renovable, es de gran interés pronosticar la producción futura de petróleo, así como el instante donde se alcanzará el máximo de producción y a partir del cual la producción empezará a decrecer.

El geofísico Marion King Hubbert (1903-1989) [20] fue el primer investigador en abordar este problema. Utilizando datos de producción de petróleo del mundo, los Estados Unidos continentales (U.S. L48) y Texas, Hubbert trazó gráficos de la tasa de producción del petróleo a lo largo del tiempo y, además, realizó predicciones del pico máximo de producción basadas en algunos métodos gráficos relacionados con una curva en forma de campana en la que el área bajo la curva era igual a la estimación de la cantidad total de aceite. Su gran éxito fue predecir que el pico de producción de los Estados Unidos Continentales sería alrededor de 1970. Más tarde [21], estableció que la producción de petróleo acumulativa sigue una curva logística y, por lo tanto, la producción anual se ajusta a su primera derivada (curva que luego llevaría su nombre).

Desde la introducción de la teoría de los picos de Hubbert, muchos investigadores han orientado su trabajo en esta dirección, es decir, su producción, dinámica, tiempo de pico y pico máximo de producción.

Muchos de los modelos utilizados a través los años no consideran la producción de petróleo como una variable aleatoria que evoluciona con el tiempo. No obstante, los fenómenos de crecimiento como la producción de petróleo son dinámicos y muestran una evolución en el tiempo.

En este capítulo se considerará un modelo estocástico de difusión relacionado con la curva de

Hubbert, el cual fue desarrollado por Da Luz Sant'Ana [11] y Da Luz Sant'Ana et al. [12]. Tal proceso modela la evolución de la producción de petróleo a lo largo del tiempo y proporciona información con respecto al pico de producción. El proceso verifica que su función media y función media condicionada son curvas de Hubbert; esto indica que el proceso puede ser considerado como una herramienta válida para estudiar datos que muestran un comportamiento de tipo Hubbert, como es el caso de los datos de producción de petróleo. En particular, estas funciones medias permiten ajustar los datos observados a lo largo del tiempo y predecir los valores futuros de la producción de petróleo. Por otro parte, el hecho de que estas funciones medias sean curvas de Hubbert permite estudiar el pico y el tiempo en el que se alcanza.

4.2. Obtención de la Curva de Hubbert a partir de la curva logística. Principales características

La expresión general de una curva logística es

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, t \in \mathbb{R}; a, b, c > 0.$$

Tomando $\alpha = e^{-c}$, $\eta = \frac{1}{b}$ y $\kappa = a\eta$, la expresión anterior toma la forma

$$f(t) = \frac{\kappa}{\eta + \alpha^t}, t \in \mathbb{R}; \eta, \kappa > 0, 0 < \alpha < 1$$

Derivando obtenemos

$$x(t) = f'(t) = \frac{-\kappa\alpha^t \ln(\alpha)}{(\eta + \alpha^t)^2}.$$

Imponiendo la condición $x(t_0) = x_0$, obtenemos la expresión general de la curva de Hubbert

$$x(t) = x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{(\eta + \alpha^t)^2} \alpha^{t-t_0}. \quad (4.1)$$

4.2.1. Características de la curva

Derivando $x(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0}} \left[\frac{\alpha^t \ln(\alpha) (\eta + \alpha^t)^2 - 2\alpha^t (\eta + \alpha^t) \alpha^t \ln(\alpha)}{(\eta + \alpha^t)^4} \right] \\ &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln(\alpha) \alpha^t}{\alpha^{t_0}} \left[\frac{(\eta + \alpha^t) - 2\alpha^t}{(\eta + \alpha^t)^3} \right] = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln(\alpha) \alpha^t (\eta - \alpha^t)}{\alpha^{t_0} (\eta + \alpha^t)^3}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Así,

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \eta - \alpha^t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(\eta)}{\ln(\alpha)}.$$

Además, $x'(t) < 0$ si $t < \frac{\ln(\eta)}{\ln(\alpha)}$ y $x'(t) > 0$, si $t > \frac{\ln(\eta)}{\ln(\alpha)}$. Por lo tanto, $x(t)$ tiene un máximo en

$$t_{\text{máx}} = \frac{\ln(\eta)}{\ln(\alpha)} \quad (4.3)$$

y su valor es

$$x(t_{\text{máx}}) = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0}} \frac{\alpha^{\ln(\eta)/\ln(\alpha)}}{(\eta + \alpha^{\ln(\eta)/\ln(\alpha)})^2} = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0}} \frac{\eta}{(2\eta)^2} = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{4\eta\alpha^{t_0}}.$$

Note que $t_{\text{máx}} > t_0$ si y solo si $0 < \eta < \alpha^{t_0} < 1$.

Calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln(\alpha)}{\alpha^{t_0}} \left[\frac{(\eta - 2\alpha^t) \alpha^t \ln(\alpha) (\eta + \alpha^t)^3 - 3\alpha^{2t} \ln(\alpha) (\eta - \alpha^t) (\eta + \alpha^t)^2}{(\eta + \alpha^t)^6} \right] \\ &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln^2(\alpha)}{\alpha^{t_0}} \cdot \frac{\alpha^t [(\eta - 2\alpha^t) (\eta + \alpha^t) - 3\alpha^t (\eta - \alpha^t)]}{(\eta + \alpha^t)^4} \\ &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln^2(\alpha)}{\alpha^{t_0}} \cdot \frac{\alpha^t (\eta^2 - 2\eta\alpha^t + \eta\alpha^t - 2\alpha^{2t} - 3\eta\alpha^t + 3\alpha^{2t})}{(\eta + \alpha^t)^4} \\ &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln^2(\alpha)}{\alpha^{t_0}} \cdot \frac{\alpha^t (\eta^2 - 4\eta\alpha^t + \alpha^{2t})}{(\eta + \alpha^t)^4}. \end{aligned}$$

Así, $x''(t) = 0$ si y solo si $t = \frac{\ln(2 \pm \sqrt{3}) + \ln(\eta)}{\ln(\alpha)} = t_{\text{máx}} + \frac{\ln(2 \pm \sqrt{3})}{\ln(\alpha)}$. Es decir, la curva

$x(t)$ tiene puntos de inflexión en

$$t_{\text{inf } 1} = t_{\text{máx}} + \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\ln(\alpha)} \quad (4.4)$$

y

$$t_{\text{inf } 2} = t_{\text{máx}} + \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\ln(\alpha)}.$$

Note que $t_{\text{inf } 1} < t_{\text{máx}} < t_{\text{inf } 2}$ y son simétricos alrededor de $t_{\text{máx}}$. Además, $t_{\text{inf } 1} > t_0$ si y solo si $\eta < \alpha^{t_0} (2 - \sqrt{3})^{-1} < (2 - \sqrt{3})^{-1}$.

El valor de la curva en esos puntos es

$$\begin{aligned} x(t_{\text{inf } i}) &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0}} \frac{\alpha^{t_{\text{máx}} + \ln(2 \pm \sqrt{3}) / \ln(\alpha)}}{\left(\eta + \alpha^{t_{\text{máx}} + \ln(2 \pm \sqrt{3}) / \ln(\alpha)}\right)^2} \\ &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0}} \frac{\eta (2 \pm \sqrt{3})}{\eta^2 (3 \pm \sqrt{3})^2} = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{6\eta\alpha^{t_0}} = \frac{2}{3} t_{\text{máx}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

El área bajo la curva también conocida como *ultimate recoverable resources (URR)* en el contexto de la producción del petróleo. Concretamente,

$$\begin{aligned} URR &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^t}{(\eta + \alpha^t)^2} dt = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0} \ln(\alpha)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^t \ln(\alpha)}{(\eta + \alpha^t)^2} \right] dt \\ &= \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{t_0} \ln(\alpha)} \left[\frac{-1}{(\eta + \alpha^t)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2}{\eta\alpha^{t_0} \ln(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.3. Proceso de difusión Hubbert

Ahora, nuestra intención es la de introducir un proceso de difusión asociado a la curva de Hubbert. Reordenando (4.2) vemos que

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\ln(\alpha) \frac{(\alpha^t - \eta)}{(\eta + \alpha^t)} x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{(\eta + \alpha^t)^2} \alpha^{t-t_0} = r(t) x(t)$$

donde $r(t) = -\ln(\alpha) \frac{(\alpha^t - \eta)}{\eta + \alpha^t}$.

Este modelo es una generalización del modelo de crecimiento Malthusiano con tasa de fertilidad $r(t)$. Reemplazando la tasa de fertilidad por $r(t) + \sigma W_t$, donde W_t es un proceso de Wiener, obtenemos la ecuación de Langevin

$$\frac{dX_t}{dt} = r(t) X(t) + \sigma X_t dW_t$$

la cual podemos reescribir como la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = r(t) X(t) + \sigma X_t dW$$

Como vimos en el capítulo 3, si la condición inicial es degenerada o lognormal entonces $\{X_t : t \geq t_0\}$ es un proceso de difusión lognormal no homogéneo que toma valores en \mathbb{R}^+ , con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = r(t) x$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$$

y con función de densidad de transición, para $s < t$, dada por

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \int_s^t r(u) du + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right).$$

Ahora, $\int_s^t r(u) du = \int_s^t \frac{x'(u)}{x(u)} du = \ln\left(\frac{x(t)}{x(s)}\right) = 2 \ln\left(\frac{\eta + \alpha^s}{\eta + \alpha^t}\right) + \ln(\alpha)(t-s)$. Así,

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2T^{\eta,\alpha} - \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right),$$

donde $T^{\eta,\alpha} = \ln\left(\frac{\eta + \alpha^s}{\eta + \alpha^t}\right)$.

Asumiendo que $X_0 \sim \Lambda(\mu_0, \sigma_0^2)$, la función media y varianza están dados por

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \mu_0 + 2 \ln \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right) + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) \\ \sigma^2(t) &= \sigma^2(t - t_0).\end{aligned}$$

Nota: La condición inicial degenerada es un caso particular del anterior. Para ello se debe considerar $\mu_0 = \ln(x_0)$ y $\sigma_0^2 = 0$.

Como vimos en el capítulo 3, algunas de las principales características del proceso se formulan conjuntamente para las condiciones iniciales degenerada y lognormal con la siguiente función:

$$G^\lambda(t|y, s) = M(t|y, \tau)^{\lambda_1} \exp\left(\lambda_2 (\lambda_3 \sigma_0^2 + \sigma^2(t-s))^{\lambda_4}\right),$$

con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^t$ y donde

$$M(t|y, s) = \left(\frac{\eta + \alpha^s}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \exp\left(y + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right).$$

En particular, la funciones media y media condicionada del proceso son

$$\begin{aligned}E[X(t)] &= \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \exp\left(\mu_0 + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0)\right) \exp\left(\frac{1}{2}(\sigma_0^2 + \sigma^2(t-t_0))\right) \\ &= \exp\left(\mu_0 + \frac{1}{2}\sigma_0^2\right) \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \alpha^{t-t_0}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}E[X(t) | X(s) = x_s] &= \left(\frac{\eta + \alpha^s}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \exp\left(\ln(x_s) + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right) \\ &= x_s \left(\frac{\eta + \alpha^s}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \alpha^{t-s}\end{aligned}$$

respectivamente.

Note que tanto la función media como la función media condicionada son curvas de Hubbert de las consideradas en este trabajo.

4.4. Inferencia en el proceso de Hubbert

Del capítulo 3, tenemos que la función de máxima verosimilitud está dada por

$$L_x(\mu, \delta, \alpha, \eta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^d \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(x_{i1}) - \mu]^2}{2\delta^2}\right)}{x_{i1}\sqrt{2\pi\delta^2}} \prod_{j=2}^{n_i} \frac{1}{x_{ij}\sqrt{2\pi x_{ij}(t_{ij} - t_{i,j-1})}} \\ \times \exp\left[-\frac{\left[\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) - 2T_{ij}^{\eta,\alpha} - \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{2\sigma^2(t_{ij} - t_{i,j-1})}\right],$$

donde $T_{ij}^{\eta,\alpha} = \ln\left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j}}}\right)$ y la función de log-verosimilitud está dada por

$$\ln L_X = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{d}{2} \ln(\delta^2) - \frac{N-d}{2} \ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^d \ln(x_{i1}) \\ - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu]^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(x_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{i,j-1}) \\ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) - 2T_{ij}^{\eta,\alpha} - \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}}.$$

Ahora,

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) - 2T_{ij}^{\eta,\alpha} - \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \\ = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln^2(x_{i,j}/x_{i,j-1})}{t_{ij} - t_{i,j-1}} + 4 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left(T_{ij}^{\eta,\alpha}\right)^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \\ + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} (t_{ij} - t_{i,j-1}) - 4 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \\ - 2 \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) + 4 \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} T_{ij}^{\eta,\alpha}.$$

Note que

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} (t_{ij} - t_{i,j-1}) = \sum_{i=1}^d (t_{i,n_i} - t_{i,1}), \quad \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) = \sum_{i=1}^d \ln(x_{i,n_i}/x_{i,1})$$

y

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} T_{ij}^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \ln\left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}}\right).$$

Tomando

$$Y_1^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{(T_{ij}^{\eta,\alpha})^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}}, \quad Y_2^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}}, \quad R^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \ln\left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}}\right)$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln^2(x_{i,j}/x_{i,j-1})}{t_{ij} - t_{i,j-1}}, \quad Z_2 = \sum_{i=1}^d (t_{i,n_i} - t_{i,1}), \quad Z_3 = \sum_{i=1}^d \ln(x_{i,n_i}/x_{i,1}),$$

el logaritmo de la función de máxima verosimilitud toma la forma

$$\begin{aligned} \ln L_X &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{d}{2} \ln(\delta^2) - \frac{N-d}{2} \ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^d \ln(x_{i1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu]^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(x_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{i,j-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[Z_1 + 4Y_1^{\eta,\alpha} + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 Z_2 - 4Y_2^{\eta,\alpha} - 2 \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2}\right) (Z_3 - 2R^{\eta,\alpha}) \right]. \end{aligned}$$

A continuación determinamos las estimaciones de los parámetros a partir del logaritmo de la función de máxima verosimilitud. En cuanto a μ y δ^2 , las estimaciones se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial \ln L_x}{\partial \mu} = 0 \text{ y } \frac{\partial \ln L_x}{\partial \delta^2} = 0.$$

Puesto que

$$\frac{\partial \ln L_x}{\partial \mu} = -\frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^d \ln(x_{i1}) - d\mu = 0,$$

despejando obtenemos

$$\hat{\mu} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \ln(x_{i1}), \quad (4.7)$$

mientras que como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_x}{\partial \delta^2} &= -\frac{d}{2\delta^2} + \frac{1}{2(\delta^2)^2} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu]^2 = 0 \\ \Rightarrow -d\delta^2 + \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \mu]^2 &= 0 \end{aligned}$$

se concluye que

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [\ln(x_{i1}) - \hat{\mu}]^2 \quad (4.8)$$

Por otro lado, debemos obtener las derivadas respecto del resto de parámetros. Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_x}{\partial \sigma^2} &= -\frac{N-d}{2\sigma^2} \\ &+ \frac{1}{2\sigma^4} \left[Z_1 + 4Y_1^{\eta,\alpha} + \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 Z_2 - 4Y_2^{\eta,\alpha} - 2 \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) (Z_3 - 2R^{\eta,\alpha}) \right] \\ &- \frac{1}{2\sigma^2} \left[- \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) Z_2 + Z_3 - 2R^{\eta,\alpha} \right] = 0. \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos la ecuación

$$(N-d)\sigma^2 - Z_1 - 4Y_1^{\eta,\alpha} - \left(\ln^2(\alpha) - \frac{\sigma^4}{4} \right) Z_2 + 2\ln(\alpha)(Z_3 - 2R^{\eta,\alpha}) + 4Y_2^{\eta,\alpha} = 0 \quad (4.9)$$

Antes de derivar $\ln L_x$ con respecto a η y α , vamos a calcular $\frac{\partial Y_1^{\eta,\alpha}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial Y_2^{\eta,\alpha}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial R^{\eta,\alpha}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial Y_1^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial Y_2^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial R^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_1^{\eta,\alpha}}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left(T_{ij}^{\eta,\alpha}\right)^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \right] = 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\ln \left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j}}} \right) \right] \\
&= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\eta + \alpha^{t_{i,j}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}} \frac{\alpha^{t_{i,j}} - \alpha^{t_{i,j-1}}}{(\eta + \alpha^{t_{i,j}})^2} \\
&= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\alpha^{t_{i,j}} - \alpha^{t_{i,j-1}}}{(\eta + \alpha^{t_{i,j-1}})(\eta + \alpha^{t_{i,j}})} = 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha} W_{ij}^\alpha}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}}
\end{aligned}$$

con $W_{ij}^\alpha = \alpha^{t_{i,j}} - \alpha^{t_{i,j-1}}$ y $S_{ij}^{\eta,\alpha} = (\eta + \alpha^{t_{i,j}})(\eta + \alpha^{t_{i,j-1}})$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_2^{\eta,\alpha}}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \right] \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1})}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\eta + \alpha^{t_{i,j}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}} \frac{\alpha^{t_{i,j}} - \alpha^{t_{i,j-1}}}{(\eta + \alpha^{t_{i,j}})^2} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) W_{ij}^\alpha}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R^{\eta,\alpha}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{i=1}^d \ln \left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}} \right) \right] = \sum_{i=1}^d \frac{\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}}{\eta + \alpha^{t_{i,1}}} \frac{\alpha^{t_{i,n_i}} - \alpha^{t_{i,1}}}{(\eta + \alpha^{t_{i,n_i}})^2} = \sum_{i=1}^d \frac{W_i^\alpha}{S_i^{\eta,\alpha}}$$

con $W_i^\alpha = \alpha^{t_{i,n_i}} - \alpha^{t_{i,1}}$ y $S_i^{\eta,\alpha} = (\eta + \alpha^{t_{i,1}})(\eta + \alpha^{t_{i,n_i}})$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_1^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left(T_{ij}^{\eta,\alpha}\right)^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \right] = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{2T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\ln \left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j}}} \right) \right] \\
&= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\eta + \alpha^{t_{i,j}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}} \frac{t_{i,j-1} \alpha^{t_{i,j-1}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j}}) - t_{ij} \alpha^{t_{i,j}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j-1}})}{(\eta + \alpha^{t_{i,j}})^2} \\
&= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha} V_{ij}^{\eta,\alpha}}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}},
\end{aligned}$$

donde $V_{ij}^{\eta,\alpha} = t_{i,j-1} \alpha^{t_{i,j-1}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j}}) - t_{ij} \alpha^{t_{i,j}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j-1}})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_2^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \right] \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1})}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{\eta + \alpha^{t_{i,j}}}{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}} \frac{t_{i,j-1} \alpha^{t_{i,j-1}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j}}) - t_{ij} \alpha^{t_{i,j}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j-1}})}{(\eta + \alpha^{t_{i,j}})^2} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1}) V_{ij}^{\eta,\alpha}}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sum_{i=1}^d \ln \left(\frac{\eta + \alpha^{t_{i,1}}}{\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}} \right) \right] = \sum_{i=1}^d \frac{\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}}{\eta + \alpha^{t_{i,1}}} \cdot \frac{t_{i,1} \alpha^{t_{i,1}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}) - t_{i,n_i} \alpha^{t_{i,n_i}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,1}})}{(\eta + \alpha^{t_{i,n_i}})^2} \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{t_{i,1} \alpha^{t_{i,1}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}) - t_{i,n_i} \alpha^{t_{i,n_i}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,1}})}{S_i^{\eta,\alpha}} = \sum_{i=1}^d \frac{V_i^{\eta,\alpha}}{S_i^{\eta,\alpha}},
\end{aligned}$$

donde $V_i^{\eta,\alpha} = t_{i,1} \alpha^{t_{i,1}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,n_i}}) - t_{i,n_i} \alpha^{t_{i,n_i}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,1}})$.

Tomando

$$\begin{aligned}
X_1^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \cdot \frac{W_{ij}^{\alpha}}{S_{ij}^{\eta,\alpha}}, & X_2^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1})}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \cdot \frac{W_{ij}^{\alpha}}{S_{ij}^{\eta,\alpha}}, \\
X_3^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \frac{W_{ij}^{\alpha}}{S_{ij}^{\eta,\alpha}}, & X_4^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \frac{V_i^{\eta,\alpha}}{S_i^{\eta,\alpha}}, \\
X_5^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln(x_{i,j}/x_{i,j-1})}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \cdot \frac{V_{ij}^{\eta,\alpha}}{S_{ij}^{\eta,\alpha}}, & X_6^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}} \cdot \frac{V_{ij}^{\eta,\alpha}}{S_{ij}^{\eta,\alpha}},
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L_x}{\partial \alpha} &= 0 \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2} \left[4 \frac{\partial Y_1^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{2Z_2}{\alpha} \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) - 4 \frac{\partial Y_2^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{2}{\alpha} (Z_3 - 2R^{\eta,\alpha}) + 4 \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial R^{\eta,\alpha}}{\partial \alpha} \right] &= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\alpha X_5^{\eta,\alpha} - 4\alpha X_6^{\eta,\alpha} - \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) (Z_2 + 2\alpha X_4^{\eta,\alpha}) + Z_3 - 2R^{\eta,\alpha} = 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L_x}{\partial \eta} = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2} \left[4\frac{\partial Y_1^{\eta,\alpha}}{\partial \eta} - 4\frac{\partial Y_2^{\eta,\alpha}}{\partial \eta} + 4\left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial R^{\eta,\alpha}}{\partial \eta} \right] = 0 \\ &\Rightarrow X_2^{\eta,\alpha} - 2X_3^{\eta,\alpha} - \left(\ln(\alpha) - \frac{\sigma^2}{2} \right) X_1^{\eta,\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Despejando σ^2 de la última ecuación obtenemos

$$\sigma^2 = 2 \left[\frac{2X_3^{\eta,\alpha} - X_2^{\eta,\alpha}}{X_1^{\eta,\alpha}} + \ln(\alpha) \right] = 2 [S^{\eta,\alpha} + \ln(\alpha)],$$

donde $S^{\eta,\alpha} = \frac{2X_3^{\eta,\alpha} - X_2^{\eta,\alpha}}{X_1^{\eta,\alpha}}$.

Sustituyendo la expresión de σ^2 en las ecuaciones (4.9) y (4.10), y ordenando, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} S^{\eta,\alpha} [2(N-d) + (S^{\eta,\alpha} + 2\ln(\alpha))Z_2] - 4Y_1^{\eta,\alpha} + 4Y_2^{\eta,\alpha} - Z_1 + 2\ln(\alpha)(Z_3 - 2R^{\eta,\alpha} + N-d) &= 0 \\ 2\alpha(X_5^{\eta,\alpha} - 2\alpha X_6^{\eta,\alpha} + X_4^{\eta,\alpha}) - 2R^{\eta,\alpha} + S^{\eta,\alpha}Z_2 + Z_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por lo tanto, la estimación de σ^2 está dado por

$$\widehat{\sigma^2} = 2 \left[S^{\widehat{\eta},\widehat{\alpha}} + \ln(\widehat{\alpha}) \right] \quad (4.13)$$

y las estimaciones de máxima verosimilitud $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\eta}$ se obtienen a partir de la solución del sistema de ecuaciones (4.12).

Como se indicó en el capítulo 3, dada la complejidad del sistema se necesita de procedimientos numéricos para hallar su solución. Además, la mayoría de los procedimientos requieren de una solución inicial. Una vez que se han obtenido las estimaciones MV de los parámetros del modelo, aplicamos el teorema de Zehna para estimar las funciones paramétricas.

4.5. Estimación de los parámetros

4.5.1. Búsqueda de una solución inicial para el sistema

Para obtener una buena solución inicial, Luz-Sant'Ana [11] y Luz-Sant'Ana, I. et al. [12] proponen tres alternativas. Las primeras dos están basadas en la información de las trayectorias muestrales y la tercera depende de la información disponible de la estimación de la URR.

Procedimiento 1. Para aplicar este método, se asume que el pico y el tiempo del pico son conocidos o pueden ser aproximados. Dado (4.3) y (4.4), se tiene que

$$x(t_{\text{máx}}) = x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{4\eta\alpha^{t_0}} = x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{4} = x_0 \frac{\frac{\eta}{\alpha^{t_0}} + \frac{\alpha^{t_0}}{\eta} + 2}{4} = x_0 \frac{\alpha^{t_{\text{máx}}-t_0} + \alpha^{t_0-t_{\text{máx}}} + 2}{4}$$

Sustituyendo $t_{\text{máx}}$ y $x(t_{\text{máx}})$ por los valores aproximados $t_{\text{máx}}^{\text{aprox}}$ y $x(t_{\text{máx}}^{\text{aprox}})$, respectivamente, la solución de la ecuación anterior provee el valor inicial para α (α_0), mientras que el valor inicial para η (η_0) es $\eta_0 = \alpha_0^{t_{\text{máx}}^{\text{aprox}}}$.

La aproximación se puede realizar interpolando los valores obtenidos de la media de las trayectorias muestrales y luego calcular el máximo de la función interpolada.

Procedimiento 2. En este caso se asume que el punto de inflexión $t_{\text{inf}} = t_{\text{inf},1}$ es conocido o aproximado. Usando (4.4) y (4.5) vemos que

$$\begin{aligned} x(t_{\text{inf}}) &= \frac{2}{3}x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{4\eta\alpha^{t_0}} = \frac{x_0}{6} \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{\eta\alpha^{t_0}} = \frac{x_0}{6} \left[\frac{\eta}{\alpha^{t_0}} + \frac{\alpha^{t_0}}{\eta} + 2 \right] \\ &= \frac{x_0}{6} \left[(2 - \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3}) \eta\alpha^{-t_0} + (2 + \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3})^{-1} \eta^{-1}\alpha^{t_0} + 2 \right] \\ &= \frac{x_0}{6} \left[(2 - \sqrt{3}) \alpha^{t_{\text{inf}}-t_0} + (2 + \sqrt{3}) \alpha^{t_0-t_{\text{inf}}} + 2 \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$x(t_{\text{inf}}) = \frac{x_0}{6} \left[(2 - \sqrt{3}) \alpha^{t_{\text{inf}}-t_0} + (2 + \sqrt{3}) \alpha^{t_0-t_{\text{inf}}} + 2 \right].$$

Por lo tanto, una vez conocido o aproximado t_{inf} y $x(t_{\text{inf}})$, de la ecuación anterior obtene-

mos el valor inicial de α (α_0) y el valor inicial de η (η_0) se obtiene de $\eta_0 = \frac{\alpha_0^{t_{\text{inf}}}}{2 + \sqrt{3}}$ el cual se obtiene de despejar η en (5).

Ahora,

$$x'''(t) = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln^3(\alpha)}{\alpha^{t_0}} \cdot \frac{\alpha^t (\eta - \alpha^t) (\eta^2 - 10\eta\alpha^t + \alpha^{2t})}{(\eta + \alpha^t)^5}.$$

Evaluando en t_{inf} tenemos que

$$x'''(t_{\text{inf}}) = \frac{x_0 (\eta + \alpha^{t_0})^2 \ln^3(\alpha)}{\alpha^{t_0}} \cdot \frac{6(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{\eta^2(3 + \sqrt{3})^5} > 0.$$

Es decir, el instante de inflexión de la curva coincide con aquel en el que su derivada alcanza el máximo. Por lo tanto, para aproximar el tiempo de inflexión, los autores sugieren aproximar los valores de la derivada de la trayectoria media de la muestra. Este cálculo puede realizarse interpolando previamente los valores de la muestra y considerando la derivada de la expresión encontrada. Por lo tanto, el instante en el que se alcanza el máximo de la derivada es la aproximación de t_{inf} , y el valor de la función aproximada en este punto es la aproximación para $x(t_{\text{inf}})$.

Procedimiento 3. Suponga que se conocen estimaciones del URR (lo cual sucede a menudo en aplicaciones prácticas). En este caso, los autores sugieren el siguiente método:

Sea T_F el tiempo de observación final -el cual puede ser antes o después de t_{inf} y/o $t_{\text{máx}}$ - y sea c definido por

$$c = \int_{t_0}^{T_F} x(t) dt = \eta URR \frac{\alpha^{t_0} - \alpha^{T_F}}{(\eta + \alpha^{t_0})\eta + \alpha^{T_F}}. \quad (4.14)$$

En la práctica, una aproximación para c se puede obtener por integración numérica a partir de los datos. Por lo tanto, conocidos los valores del URR y c , (4.6) y (4.14) determinan un sistema el cual podemos obtener los valores iniciales de α_0 y η_0 .

Ahora, de (4.6) y (4.14) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$x_0\eta^2 + \eta(2x_0 + \ln(\alpha)URR)\alpha^{t_0} + x_0\alpha^{2t_0} = 0 \quad (4.15)$$

$$M\eta^2 + \alpha^{t_0} \left[(M-1) + (M+1)\alpha^h \right] \eta + M\alpha^{2t_0+h} = 0, \quad (4.16)$$

donde $M = \frac{c}{URR}$ y $h = T_F - t_0$.

Despejando η^2 de las ecuaciones (4.15) y (4.16) e igualando obtenemos

$$\frac{\alpha^{t_0}(2x_0 + \ln(\alpha)URR)\eta + x_0\alpha^{2t_0}}{x_0} = \frac{\alpha^{t_0} \left[(M-1) + (M+1)\alpha^h \right] \eta - M\alpha^{2t_0+h}}{M}$$

Luego, despejando η obtenemos

$$\eta = \frac{x_0M\alpha^{t_0}(\alpha^h - 1)}{x_0(M+1)(1 - \alpha^h) + c\ln(\alpha)} := \kappa(\alpha) \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.17) en (4.15) obtenemos

$$x_0\kappa^2(\alpha) + (2x_0 + \alpha^{t_0}\ln(\alpha)URR)\kappa(\alpha) + x_0\alpha^{2t_0} = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.18)$$

la cual nos da el valor inicial α_0 . Finalmente, $\eta = \kappa(\alpha_0)$.

4.5.2. Ajuste y predicción del modelo

Los pasos para el ajuste y estudio del modelo sobre un conjunto de datos se muestran a continuación:

1. Obtenga las estimaciones de ML de los parámetros del modelo: $\hat{\mu}$ y $\hat{\delta}^2$ a partir de las observaciones en el tiempo inicial t_1 ; $\hat{\alpha}$ y $\hat{\eta}$ como solución del sistema (12) y $\hat{\sigma}^2$ por medio de (13). Para resolver (12), considere una solución inicial α_0 y η_0 , proporcionada por alguno de los procedimientos de la sección anterior y que depende de la información disponible.

2. Calcular la estimación MV de la media, mediana, moda y las funciones percentil, así como las condicionales de tales funciones con el propósito de ajustar el modelo, o bien, obtener pronósticos a partir del modelo.
3. Proporcionar pronósticos para el tiempo de pico. Esto se puede realizar a través de uno de los caminos siguientes:

- a) Calcular la estimación de MV del tiempo del pico común de las funciones media y media condicional:

$$\hat{t}_{\text{máx}} = \frac{\ln(\hat{\eta})}{\ln(\hat{\alpha})}$$

- b) Use la distribución de la variable aleatoria *tiempo del pico* para obtener una estimación puntual, $t_{\text{máx}}^*$, por medio de medidas de tendencia central.
4. Proporcionar pronósticos para el pico. Esto se puede realizar a través de uno de los caminos siguientes:

- a) Calcular la estimación MV del pico a partir de la función media:

$$\exp\left(\hat{\mu}_1 + \frac{\hat{\delta}^2}{2}\right) \frac{(\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_1})^2}{4\hat{\eta}\hat{\alpha}^{t_1}},$$

o bien, a partir de la función media condicional

$$x_s \frac{(\hat{\eta} + \hat{\alpha}^s)^2}{4\hat{\eta}\hat{\alpha}^s},$$

donde x_s es el valor del proceso en s .

- b) Calcular una estimación puntual del pico como el valor de la media estimada, o bien, como el valor de la función media condicional estimada, evaluada en la estimación puntual del tiempo del pico obtenido de la distribución de la variable aleatoria *tiempo del pico*, es decir,

$$\left(\hat{\mu}_1 + \frac{\hat{\delta}^2}{2}\right) \left(\frac{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_1}}{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_{\text{máx}}^*}}\right)^2 \hat{\alpha}^{(t_{\text{máx}}^* - t_1)}$$

o

$$x_s \left(\frac{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^s}{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_{\text{máx}}^*}} \right)^2 \hat{\alpha}^{(t_{\text{máx}}^* - s)}$$

4.5.3. Estudio de simulación

Para validar los procedimientos descritos en las secciones previas, se realizó un estudio de simulación con 50 trayectorias muestrales, las cuales se obtienen a partir de la relación existente entre el proceso de Hubbert y el proceso de Wiener

$$X(t) = X_{t_0} \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right) \alpha^{t-t_0} \exp \left(\sigma W(t-t_0) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right),$$

considerando 501 datos con $h = \Delta t_i = 0.1$. Se tomaron los siguientes valores para los parámetros: $\eta = (0.03, 0.04, 0.05)$, $\alpha = (0.85, 0.875, 0.9, 0.925)$ y $\sigma = (0.01, 0.05, 0.07)$. Todas las 36 posibles combinaciones fueron contempladas para el estudio. La distribución inicial es degenerada en el valor $x_0 = 100$. Después de la simulación de cada trayectoria, se escogió una muestra empezando en el primer valor, usando un paso igual a 1. Por lo tanto, se obtuvo una muestra de 51 datos para cada trayectoria muestral. Además, todo el procedimiento se repitió 100 veces.

Se han considerado dos escenarios:

Escenario 1. Se visualiza el pico. En este caso, hemos tomado todas las trayectorias muestrales simuladas.

Escenario 2. No se visualiza el pico. En este caso consideramos los datos truncados del anterior en un momento específico t_F , antes de la visualización de los picos pero después del primer punto de inflexión. En concreto, el instante de truncamiento considerado es el que representa el tercer cuartil de los instantes entre el punto de inflexión y la hora pico. La tabla 4.1 muestra el número de datos usados para cada combinación de los parámetros en este escenario.

Para obtener la solución inicial para el sistema de ecuaciones de verosimilitud se procedió de la siguiente manera:

η	α			
	0.85	0.875	0.9	0.925
0.03	19	23	30	40
0.04	17	21	27	37
0.05	16	19	25	34

Figura 4.1: Número de datos usados en la simulación

Para el **procedimiento 1**, se ajustó un spline cúbico natural, v , a la media de las trayectorias muestrales. Luego, se considera $t_{\text{máx}}$ como el instante en el que v alcanza su máximo y $x(t_{\text{máx}}) = v(t_{\text{máx}})$.

Para el **procedimiento 2**, se ajusta un spline cúbico natural, v , a la media de las trayectorias muestrales, t_{inf} es el instante en el cual su primera derivada tiene un máximo local. Luego, tomamos $x(t_{\text{inf}}) = v(t_{\text{inf}})$.

Para el **procedimiento 3**, se analizó el efecto que se ejerce sobre la estimación de parámetros cuando el valor informado de la URR es una buena estimación, así como cuando esta cantidad sobrestima y subestima la cantidad real en un 10%.

Para el escenario 1 sólo se usó el procedimiento 1. mientras que para el escenario 2 se usaron los procedimientos 2 y 3.

Las soluciones iniciales para los casos previamente considerados se muestran en la tabla 4.2:

Vemos que las soluciones iniciales ya proporcionan buenas estimaciones para los parámetros teóricos. Además, se observa que dichas estimaciones son menos buenas conforme σ crece.

La tabla 4.3 siguiente contiene las estimaciones máximo verosímiles. La primera subtabla contiene la estimación junto con los errores absolutos relativos totales y la segunda las estimaciones con los procedimientos 2 y 3.

Se observa que las estimaciones con los procedimientos 2 y 3 son las mismas independientemente del valor inicial. Además, la principal diferencia en las estimaciones entre los dos escenarios se da en la estimación de σ , la cual es más precisa en el escenario 1.

La tabla 4.4 muestra las estimaciones del tiempo de pico y el pico:

η	α	σ	Escenario 1 Procedimiento 1		Escenario 2 Procedimiento 2		Procedimiento 3 Estándar		-10%URR		+10%URR	
			η_0	α_0	η_0	α_0	η_0	α_0	η_0	α_0	η_0	α_0
0.03	0.85	0.01	0.029956	0.850131	0.030073	0.850478	0.030007	0.850019	0.03246	0.845606	0.027853	0.853436
		0.05	0.029699	0.850159	0.028736	0.854153	0.030111	0.850215	0.032574	0.845794	0.027948	0.853637
		0.07	0.029611	0.849916	0.02884	0.854256	0.030206	0.850362	0.032678	0.84593	0.028035	0.853791
	0.875	0.01	0.029949	0.874758	0.029451	0.876015	0.030001	0.874992	0.032466	0.871298	0.02784	0.877853
		0.05	0.029685	0.874473	0.028455	0.878843	0.030094	0.875046	0.032567	0.871334	0.027926	0.877919
		0.07	0.029551	0.874289	0.028672	0.878722	0.030194	0.875119	0.032676	0.871388	0.028018	0.878003
	0.9	0.01	0.029931	0.899562	0.029765	0.900526	0.029993	0.899966	0.03239	0.896776	0.027875	0.902421
		0.05	0.029619	0.898521	0.028117	0.903211	0.030088	0.899896	0.032491	0.89667	0.027964	0.902375
		0.07	0.029552	0.898572	0.028421	0.903215	0.030216	0.899907	0.032629	0.896647	0.028082	0.902407
	0.925	0.01	0.029971	0.924943	0.02972	0.925401	0.029997	0.924977	0.032426	0.922619	0.027858	0.926795
		0.05	0.029835	0.923797	0.028192	0.927641	0.030158	0.924948	0.0326	0.922555	0.028008	0.926788
		0.07	0.029932	0.922613	0.029041	0.927513	0.03036	0.924984	0.032818	0.922557	0.028195	0.926845
0.04	0.85	0.01	0.039963	0.849822	0.040454	0.850101	0.040017	0.850044	0.043245	0.845283	0.037175	0.853744
		0.05	0.039617	0.848804	0.038837	0.85328	0.040198	0.850351	0.043444	0.845591	0.037341	0.85405
		0.07	0.039462	0.848059	0.038881	0.8537	0.040351	0.850559	0.043612	0.845793	0.037481	0.854261
	0.875	0.01	0.039921	0.875031	0.039901	0.875651	0.04001	0.875013	0.043194	0.870874	0.037195	0.878221
		0.05	0.039493	0.873856	0.0378	0.879001	0.040174	0.875152	0.043373	0.871001	0.037346	0.878367
		0.07	0.039368	0.873368	0.03758	0.879615	0.040335	0.875271	0.043548	0.871106	0.037495	0.878494
	0.9	0.01	0.039857	0.899983	0.038704	0.901569	0.039977	0.899978	0.043136	0.896525	0.037211	0.902645
		0.05	0.039305	0.898338	0.03701	0.904052	0.040149	0.899954	0.043	0.896474	0.037353	0.902638
		0.07	0.039189	0.897392	0.038094	0.903333	0.040336	0.899989	0.043502	0.896484	0.037526	0.902689
	0.925	0.01	0.039976	0.924837	0.038497	0.926297	0.039989	0.924964	0.043083	0.922265	0.037231	0.927041
		0.05	0.039607	0.924053	0.03635	0.928729	0.040193	0.924872	0.043301	0.922135	0.037422	0.926975
		0.07	0.039542	0.922953	0.036492	0.928856	0.040469	0.924873	0.043598	0.922098	0.037679	0.926998
0.05	0.85	0.01	0.049938	0.85006	0.049988	0.850601	0.050031	0.850065	0.053899	0.844698	0.046586	0.85423
		0.05	0.049451	0.849376	0.0479	0.854274	0.050294	0.850428	0.054187	0.845064	0.046829	0.85459
		0.07	0.049219	0.84854	0.047163	0.8551	0.050513	0.850666	0.054425	0.845298	0.04703	0.85483
	0.875	0.01	0.049885	0.875095	0.050085	0.875585	0.05002	0.875029	0.053974	0.870662	0.04652	0.878427
		0.05	0.049275	0.873924	0.047384	0.879415	0.05027	0.875245	0.054247	0.870873	0.046751	0.878645
		0.07	0.049079	0.873155	0.047405	0.879438	0.050502	0.875407	0.054499	0.871027	0.046965	0.878812
	0.9	0.01	0.04986	0.899998	0.049911	0.900586	0.050003	0.899989	0.053819	0.896218	0.046592	0.902904
		0.05	0.049116	0.89923	0.046134	0.904822	0.050227	0.900002	0.054061	0.896209	0.0468	0.902931
		0.07	0.048828	0.897573	0.045193	0.905149	0.050484	0.900054	0.054338	0.89624	0.047039	0.902996
	0.925	0.01	0.049924	0.924643	0.049995	0.925384	0.049983	0.92496	0.053773	0.922058	0.04659	0.927199
		0.05	0.04939	0.923519	0.045568	0.929044	0.050253	0.924863	0.054061	0.921926	0.046842	0.927125
		0.07	0.049262	0.922339	0.045135	0.929741	0.050622	0.924866	0.054457	0.921898	0.047185	0.927148

Figura 4.2: Soluciones Iniciales

Para el escenario 1 se usó la media del proceso de Hubbert y para el escenario 2 tanto la media como la media condicional del proceso. El uso de la media condicional no proporcionó mejoras significativas (el valor absoluto de las diferencias son al menos de orden de 10^{-8}). Se observa que los valores estimados se acercan a los teóricos. Además, vemos que las estimaciones empeoran conforme σ crece.

4.5.4. Aplicación a datos reales

En este apartado consideramos datos reales que corresponden a la producción anual de petróleo crudo incluido condensado de arrendamiento de Noruega y Kazahstan. Los datos fueron tomados de U.S. Energy Information Administration [19]. Para Noruega, se tomaron los datos desde 1980 hasta el 2014. En el 2001, Noruega tuvo una producción de 3226 barriles por

η	α	σ	Escenario 1 Procedimiento 1				Escenario 2 Procedimiento 2 y 3			
			$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	Error	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	Error
0.03	0.85	0.01	0.029936	0.849934	0.009957	0.00651	0.029952	0.850123	0.009889	0.012844
		0.05	0.029776	0.849641	0.04979	0.012089	0.029693	0.85065	0.049448	0.022038
		0.07	0.029754	0.849476	0.069709	0.012973	0.029509	0.850938	0.069227	0.028513
	0.875	0.01	0.029944	0.87492	0.009957	0.006258	0.029926	0.8751	0.009928	0.00978
		0.05	0.029852	0.874562	0.049789	0.009653	0.029603	0.875513	0.04964	0.021019
		0.07	0.029886	0.874362	0.069706	0.008729	0.029416	0.875727	0.069496	0.027497
	0.9	0.01	0.029978	0.899921	0.009958	0.005021	0.029913	0.900056	0.009928	0.010162
		0.05	0.030082	0.899572	0.049792	0.007368	0.029534	0.900301	0.049639	0.023087
		0.07	0.030248	0.899376	0.06971	0.013102	0.029307	0.900436	0.069494	0.030813
	0.925	0.01	0.03004	0.924929	0.00996	0.00541	0.03007	0.924884	0.009939	0.008558
		0.05	0.030408	0.924635	0.049799	0.018014	0.030297	0.924447	0.049696	0.016577
		0.07	0.030719	0.92448	0.069719	0.028543	0.030365	0.924243	0.069574	0.01907
0.04	0.85	0.01	0.03992	0.849942	0.009957	0.006368	0.039941	0.850165	0.009856	0.016069
		0.05	0.039719	0.849679	0.049791	0.011582	0.039571	0.850892	0.049279	0.026194
		0.07	0.039689	0.849529	0.069711	0.012457	0.039286	0.851298	0.06899	0.033805
	0.875	0.01	0.039922	0.874923	0.009957	0.006338	0.039933	0.875099	0.009895	0.012288
		0.05	0.039771	0.874581	0.04979	0.010403	0.039513	0.875543	0.049473	0.023335
		0.07	0.039793	0.874388	0.069708	0.010045	0.039179	0.875798	0.069263	0.031965
	0.9	0.01	0.039956	0.899918	0.009958	0.005391	0.039948	0.900009	0.009937	0.00761
		0.05	0.040013	0.899553	0.049791	0.005001	0.039723	0.900067	0.049687	0.013259
		0.07	0.040181	0.899348	0.069709	0.009406	0.039574	0.90011	0.069562	0.017029
	0.925	0.01	0.040028	0.924923	0.009959	0.004883	0.040044	0.924887	0.009931	0.008122
		0.05	0.040433	0.924599	0.049798	0.015298	0.040222	0.924461	0.049656	0.013012
		0.07	0.040812	0.924426	0.069717	0.024963	0.040305	0.924263	0.069519	0.015293
0.05	0.85	0.01	0.049908	0.849948	0.009957	0.006201	0.049985	0.850117	0.009878	0.012637
		0.05	0.049676	0.84971	0.049792	0.010981	0.049708	0.850685	0.049387	0.018905
		0.07	0.049642	0.849572	0.069713	0.011763	0.049406	0.851031	0.069141	0.025364
	0.875	0.01	0.049902	0.874928	0.009957	0.006342	0.049893	0.875152	0.009889	0.013413
		0.05	0.049701	0.874602	0.04979	0.010634	0.049152	0.87585	0.049448	0.028971
		0.07	0.049714	0.874417	0.069709	0.010543	0.048523	0.876259	0.069227	0.042021
	0.9	0.01	0.049933	0.899917	0.009958	0.005632	0.049875	0.900091	0.009919	0.010701
		0.05	0.04994	0.899547	0.049791	0.005883	0.0493	0.900482	0.049598	0.022575
		0.07	0.050107	0.899339	0.069709	0.007031	0.048922	0.9007	0.069438	0.030366
	0.925	0.01	0.050013	0.924919	0.009959	0.004447	0.049892	0.924999	0.009928	0.009361
		0.05	0.050432	0.924574	0.049797	0.01316	0.049392	0.925027	0.04964	0.019389
		0.07	0.050865	0.924387	0.069716	0.022019	0.049056	0.925063	0.069496	0.026148

Figura 4.3: Estimaciones Máximo Verosímiles

día (Mb/d), que vamos a considerar como el único pico visualizado hasta ahora. En el caso Kazajstán, se tomaron los datos desde el año 1992 hasta 2020, y aún no se ha visualizado ningún pico. La figura 4.5 muestra la producción de crudo de los países considerados.

En el caso de Noruega, se observa que después del pico decreció hasta el 2013 y en el 2014 tuvo un repunte. Este tipo de comportamiento concuerda con la teoría de los picos desarrollada por Hubbert. Por su parte, la producción de Kazajstán aún no ha alcanzado el pico.

Previo a mostrar los resultados debemos hacer una observación muy importante respecto a los valores del tiempo. Cuando se trata con valores altos del tiempo en el proceso, siempre existirá la posibilidad de que el valor estimado de η sea muy próximo a cero. En esas situaciones, lo cual es común en casos reales, los errores de cálculo en la estimación pueden ser bastante grandes e incidir negativamente en los resultados finales. Una manera de tratar con este tipo de problema es definir un nuevo proceso de difusión $\{Y_t : t \geq t_0 - k\}$, a partir del proceso $\{X_t : t \geq t_0\}$,

η	α	σ	t_{max}	$x(t_{max})$	Escenario 1 Procedimiento 1		Escenario 2 Procedimientos 2 y 3	
					\hat{t}_{max}	$\hat{x}(t_{max})$	\hat{t}_{max}	$\hat{x}(t_{max})$
0.03	0.85	0.01	21.5763	884.0833	21.5793	885.8767	21.6054	885.4210
0.03	0.85	0.05	21.5763	884.0833	21.5664	890.3534	21.7420	892.7011
0.03	0.85	0.07	21.5763	884.0833	21.5452	890.9584	21.8260	897.9372
0.03	0.875	0.01	26.2602	884.0833	26.2562	885.6506	26.3013	886.1485
0.03	0.875	0.05	26.2602	884.0833	26.1990	888.2082	26.4761	895.2402
0.03	0.875	0.07	26.2602	884.0833	26.1460	887.2567	26.5727	900.6030
0.03	0.9	0.01	33.2815	884.0833	33.2608	884.6912	33.3289	886.5122
0.03	0.9	0.05	33.2815	884.0833	33.1061	881.8230	33.5367	897.2345
0.03	0.9	0.07	33.2815	884.0833	32.9864	877.2611	33.6580	903.7598
0.03	0.925	0.01	44.9780	884.0833	44.9168	882.9742	44.8760	882.1378
0.03	0.925	0.05	44.9780	884.0833	44.5789	872.9118	44.5100	875.9171
0.03	0.925	0.07	44.9780	884.0833	44.3543	864.5948	44.3573	874.0863
0.04	0.85	0.01	19.8062	676.0000	19.8102	677.2503	19.8390	676.9287
0.04	0.85	0.05	19.8062	676.0000	19.8035	680.4131	20.0016	682.7669
0.04	0.85	0.07	19.8062	676.0000	19.7866	680.8821	20.1057	687.3366
0.04	0.875	0.01	24.1058	676.0000	24.1047	677.2256	24.1387	677.0475
0.04	0.875	0.05	24.1058	676.0000	24.0624	679.5922	24.3105	683.6971
0.04	0.875	0.07	24.1058	676.0000	24.0187	679.2465	24.4278	689.0698
0.04	0.9	0.01	30.5511	676.0000	30.5352	676.6927	30.5665	676.8166
0.04	0.9	0.05	30.5511	676.0000	30.4046	675.8010	30.6385	680.3436
0.04	0.9	0.07	30.5511	676.0000	30.2997	673.1879	30.6883	682.7203
0.04	0.925	0.01	41.2880	676.0000	41.2352	675.5640	41.2095	675.3134
0.04	0.925	0.05	41.2880	676.0000	40.9225	669.3251	40.9113	672.5540
0.04	0.925	0.07	41.2880	676.0000	40.7059	663.5795	40.7738	671.2792
0.05	0.85	0.01	18.4331	551.2500	18.4376	552.1734	18.4506	551.3963
0.05	0.85	0.05	18.4331	551.2500	18.4345	554.5040	18.5611	554.1770
0.05	0.85	0.07	18.4331	551.2500	18.4203	554.8451	18.6458	557.2439
0.05	0.875	0.01	22.4347	551.2500	22.4355	552.2270	22.4800	552.3186
0.05	0.875	0.05	22.4347	551.2500	22.4032	554.2470	22.7280	559.8530
0.05	0.875	0.07	22.4347	551.2500	22.3660	554.1168	22.9058	566.4305
0.05	0.9	0.01	28.4332	551.2500	28.4211	551.9189	28.4842	552.5020
0.05	0.9	0.05	28.4332	551.2500	28.3093	551.8493	28.7130	558.3339
0.05	0.9	0.07	28.4332	551.2500	28.2160	550.1844	28.8529	562.2433
0.05	0.925	0.01	38.4258	551.2500	38.3795	551.1245	38.4530	552.3274
0.05	0.925	0.05	38.4258	551.2500	38.0901	546.9745	38.5974	557.3906
0.05	0.925	0.07	38.4258	551.2500	37.8837	542.7668	38.7038	560.8461

Figura 4.4: Estimaciones del tiempo de pico y el pico

como $Y_t = X_{t+k}$. Tomando $k = t_0$ (1980 para ambos países), los datos originales pueden ser considerados como observaciones del nuevo proceso con instante inicial 0. Se puede mostrar que el nuevo proceso también es un proceso de difusión de Hubbert con α y σ invariantes y $\eta' = \alpha^{-k}\eta$. Por lo tanto, las expresiones utilizadas para pronosticar los valores del proceso, así como el pico, son los mismos si se utiliza η o η' , mientras que para los relacionados con el tiempo del pico basta con deshacer los cambios realizados a tiempo.

A continuación analizaremos los casos por separado.

Noruega

En este caso se analizará tomando en cuenta los dos escenarios discutidos anteriormente dado

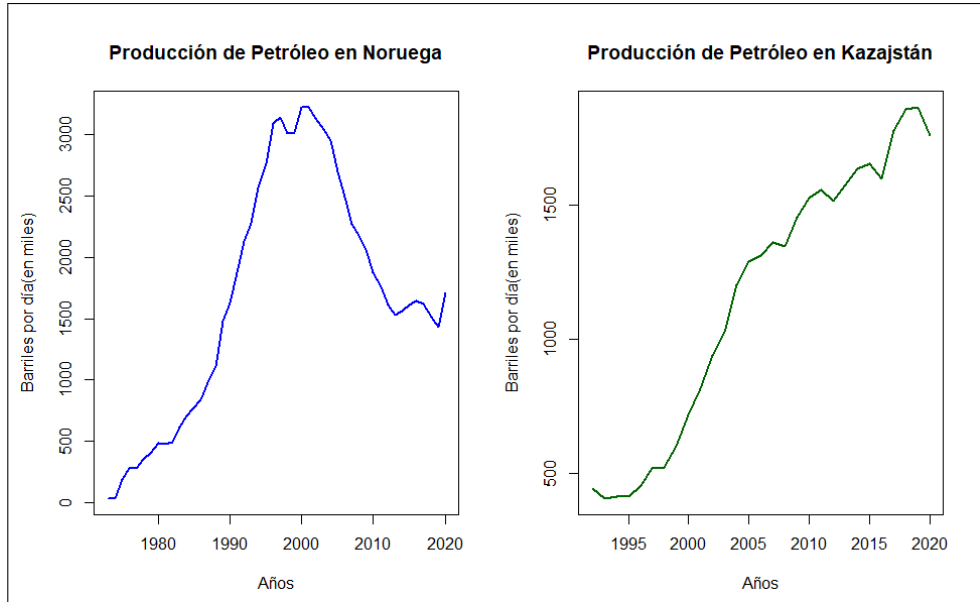


Figura 4.5: Producción de crudo

que conocemos el pico. En ambos escenarios la observación inicial es $t_0 = 1980$ y la producción inicial es 486 Mb/d. Para el escenario 2 los datos considerados van desde 1980 hasta 1999 (antes que el pico y después del tiempo de inflexión).

Para el primer escenario, la estimación de los parámetros se realizó usando el procedimiento 1 dado que el valor del pico puede ser aproximado, mientras que para el escenario 2 la estimación se realizó a través de los procedimientos 2 y 3. Los resultados se muestran en el cuadro 4.6.

Escenario	Procedimiento						Valores observados		Estimaciones MV		
		η_0	α_0	$\bar{\eta}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\sigma}$	Tiempo del pico	Pico	t_{\max}	$x(t_{\max})$	$x'(t_{\max})$
1	1	0.04	0.854	0.043	0.866	0.074	2001	3226	2001.8708	3073.8059	--
2	2	0.071	0.856	0.038	0.858	0.07	2001	3226	2001.3526	3444.9854	3118.0414
	3	0.05	0.846	0.038	0.858	0.07	2001	3226	2001.3526	3444.9854	3118.0414
	3-10%	0.053	0.838	0.038	0.858	0.07	2001	3226	2001.3526	3444.9854	3118.0414
	3+10%	0.047	0.852	0.038	0.858	0.07	2001	3226	2001.3526	3444.9854	3118.0414

Figura 4.6: Estimación de los parámetros: Noruega

Para el procedimiento 2, el instante de inflexión se aproximó previo al ajuste de un spline cúbico natural a los datos observados, donde se obtuvo que $t_{\text{inf}} = 1988.687$ y $x(t_{\text{inf}}) = 3088.2545$ Mb/d. Con respecto al procedimiento 3, el valor estimado para la URR se obtiene como la suma de las reservas probadas y estimadas, recogidas en [19], y la producción de petróleo acumulada

hasta el 2014.

La tabla anterior también contiene los valores observados de la hora pico y pico, junto con sus respectivas estimaciones. En el caso del escenario 1, la estimación del pico se realizó con estimación MV del pico de la función media. Para el escanario 2, tambien se utilizó la estimación MV del pico de la función media condicional, considerando $s = 1999$ y la producción de ese año. El valor estimado se denota por $x^*(t_{\text{máx}})$. Note que las estimaciones del tiempo de pico y el pico no dependen de los parámetros iniciales ni en los cambios en las estimaciones de la URR.

Una vez estimado el modelo, nos dimos a la tarea de inferir cuál será la producción hasta el 2040. Para esto, hemos considerado las versiones condicionales (de acuerdo a la última observación $x(t_{2014})$) de las funciones media, mediana y moda, así como las bandas de confianza dadas por las funciones de percentiles al 2.5 % y 97.5 %. Las predicciones y el gráfico en el escenario 1 se muestran en 4.7 y 4.8.

Escenario 1					
Año	Media	Mediana	Moda	2.5% Percentil	97.5% Percentil
2015	1408.2441	1404.3936	1396.7242	1214.7864	1623.5952
2016	1263.6366	1256.7358	1243.0471	1023.68	1542.8502
2017	1129.0789	1119.8427	1101.5962	871.0779	1439.6503
2018	1005.0329	994.0858	972.5481	743.7827	1328.6228
2019	891.6015	879.4786	855.7252	635.8839	1216.3899
2020	788.6079	775.7585	750.6844	543.7958	1106.6677
2021	695.667	682.4608	656.7957	464.9698	1001.6839
2022	612.2475	598.9827	573.3089	397.4245	902.7631
2023	537.7243	524.6356	499.4063	339.5401	810.6334
2024	471.4199	458.6875	434.2451	289.9536	725.6135
2025	412.6373	400.3948	376.9886	247.5015	647.7374
2026	360.6841	349.0261	326.8282	211.1825	576.8433
2027	314.8904	303.8793	282.9988	180.1322	512.6382
2028	274.6202	264.2926	244.7881	153.6039	454.7451
2029	239.2791	229.651	211.5414	130.9523	402.7386
2030	208.3185	199.3895	182.6633	111.6212	356.1706
2031	181.2371	172.9946	157.617	95.1311	314.5882
2032	157.5803	150.0024	135.9223	81.0698	277.5476
2033	136.9389	129.9972	117.1516	69.0831	244.6224
2034	118.9465	112.6082	100.9267	58.8674	215.4095
2035	103.2769	97.5062	86.9141	50.1627	189.5325
2036	89.6405	84.4003	74.821	42.7464	166.6434
2037	77.7811	73.034	64.3912	36.4284	146.4229
2038	67.4731	63.1818	55.4007	31.0464	128.58
2039	58.5179	54.6463	47.6547	26.4616	112.8511
2040	50.7412	47.2547	40.9837	22.556	98.998

Figura 4.7: Predicciones Noruega(escenario 1)

Vemos que, luego de alcanzar el pico, Noruega comienza a mostrar una disminución en la producción de pretróleo y, de acuerdo a las estimaciones, la producción para el 2040 será de 45 Mb/d. Hay que tomar en cuenta que este modelo está basado en el supuesto de un único pico y no toma en cuenta algún cambio en las suposiciones iniciales. Por ejemplo, si se han hayado

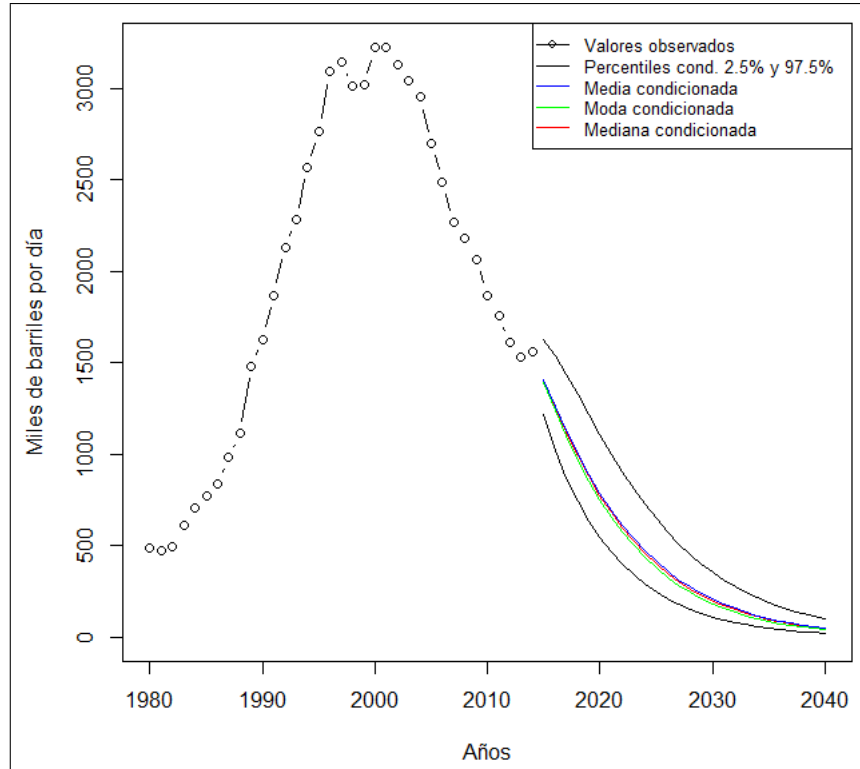


Figura 4.8: Predicciones Noruega (escenario 1)

nuevos yacimientos de petróleo.

Las predicciones y el gráfico en el escenario 2 se muestran en 4.9 y 4.10

Se observa que las predicciones entre el 2000 y el 2014 son buenas y que la del 2015 es buena en comparación con la estimada en el escenario 1.

Kazajstán

La tabla 4.11 muestra los resultados de las estimaciones.

Se observa el valor del tiempo de pico es $t_{\text{máx}} = 2020$ y el pico está dado por $x(t_{\text{máx}}) = 1759.6329$. En este caso, se utilizó la estimación MV del pico de la función media condicional, considerando $s = 2020$ y la producción de ese año. Note que las estimaciones del tiempo de pico y el pico no dependen de los parámetros iniciales ni en los cambios en las estimaciones de la URR.

Las predicciones y el gráfico respectivo se muestran 4.12 y 4.13

Escenario 2					
Año	Media	Mediana	Moda	2.5% Percentil	97.5% Percentil
2000	3084.8309	3077.2824	3082.2408	2882.7687	3529.811
2001	3115.7699	3100.54	3070.3031	2553.7165	3764.454
2002	3110.3897	3087.6122	3042.5563	2434.5575	3915.8446
2003	3068.9401	3039.0114	2980.0267	2309.7454	3998.5317
2004	2993.3233	2956.8788	2885.3155	2175.7019	4018.5339
2005	2886.9118	2844.7846	2762.3654	2032.8191	3981.0721
2006	2754.2368	2707.4044	2616.115	1883.2518	3892.2243
2007	2600.5982	2550.1207	2452.09	1729.9416	3759.1534
2008	2431.6363	2378.6056	2275.9884	1576.0504	3589.8372
2009	2252.9608	2198.4339	2093.3073	1424.5966	3392.6176
2010	2069.8033	2014.7671	1909.0459	1278.2232	3175.7256
2011	1886.7898	1832.1257	1727.5028	1139.0686	2946.8679
2012	1707.7936	1654.2575	1552.1674	1008.7175	2712.918
2013	1535.8777	1484.0904	1385.6953	888.2128	2479.7258
2014	1373.3075	1323.7546	1229.9482	778.1088	2252.0381
2015	1221.6146	1174.6537	1086.0784	678.5368	2033.5099
2016	1081.6918	1037.5646	954.8374	589.3097	1826.782
2017	953.9031	912.7501	835.6937	509.9856	1633.6005
2018	838.1952	800.0715	728.947	439.9544	1454.9561
2019	734.2016	699.0929	633.8318	378.5007	1291.2286
2020	641.3346	609.1724	549.6058	324.8565	1142.323
2021	558.8625	529.5372	475.4223	278.2417	1007.7916
2022	485.9718	459.3446	410.387	237.8939	886.9394
2023	421.8152	397.7276	353.6003	203.0881	778.9095
2024	365.547	343.8291	304.1877	173.1499	682.7524
2025	316.3488	296.8258	261.3199	147.4623	597.4783
2026	273.4459	255.9428	224.2259	125.4685	522.0968
2027	236.1182	220.4835	192.1992	106.6712	455.6446
2028	203.7046	189.7336	164.6005	90.6304	397.2048
2029	175.6059	163.1618	140.8566	76.9596	345.9187
2030	151.2829	140.2185	120.4581	65.3213	300.9924
2031	130.2547	120.4327	102.9549	55.4225	261.6997
2032	112.0943	103.3881	87.9519	47.0095	227.3816
2033	96.4251	88.7183	75.1034	39.864	197.4446
2034	82.9161	76.1024	64.1087	33.7982	171.3573
2035	71.2774	65.26	54.7064	28.6512	148.6456
2036	61.256	55.9474	46.6705	24.2853	128.889
2037	52.6314	47.9526	39.8058	20.5831	111.7154
2038	45.2121	41.0921	33.9441	17.4444	96.7968
2039	38.8321	35.2071	28.9407	14.7838	83.8443
2040	33.3475	30.1605	24.6711	12.5289	72.6045

Figura 4.9: Predicciones Noruega (escenario 2)

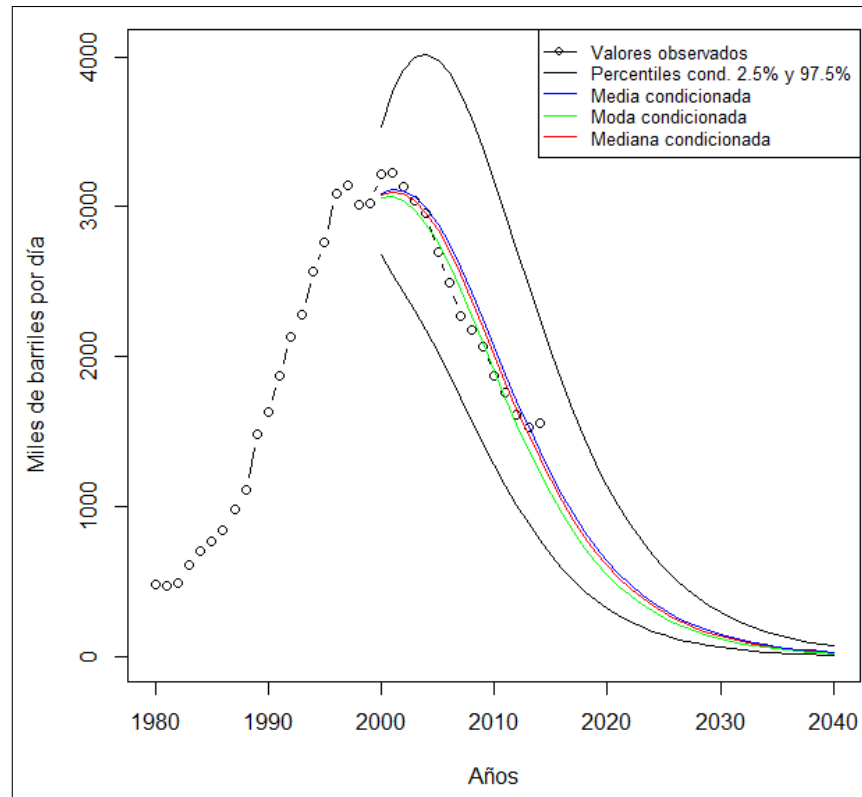


Figura 4.10: Predicciones Noruega (escenario 2)

Escenario 2						Estimaciones MV	
Procedimiento	η_0	α_0	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	t_{\max}	$x^*(t_{\max})$
2	0.047	0.932	0.066	0.91	0.062	2020.8207	1759.6329
3	0.053	0.923	0.066	0.91	0.062	2020.8207	1759.6329
3-10%	0.058	0.921	0.066	0.91	0.062	2020.8207	1759.6329
3+10%	0.049	0.925	0.066	0.91	0.062	2020.8207	1759.6329

Figura 4.11: Estimaciones caso Kazajistán

Escenario 2					
Año	Media	Mediana	Moda	2.5% Percentil	97.5% Percentil
2021	1759.5071	1756.1286	1749.391	1555.1841	1983.0369
2022	1754.2025	1747.4722	1734.0892	1471.5529	2075.1271
2023	1741.18	1731.1692	1711.32	1402.5922	2136.7201
2024	1720.6682	1707.4904	1681.4368	1339.0885	2177.2448
2025	1693.022	1676.83	1644.909	1277.8553	2200.3734
2026	1658.7097	1639.6913	1602.3063	1217.5632	2208.1709
2027	1618.2964	1596.6697	1554.2794	1157.6756	2202.1316
2028	1572.4252	1548.4325	1501.5398	1098.0534	2183.5397
2029	1521.7959	1495.6982	1444.8379	1038.7726	2153.612
2030	1467.1443	1439.215	1384.9414	980.0271	2113.5537
2031	1409.2212	1379.7402	1322.6155	922.0705	2064.5743
2032	1348.7733	1318.0212	1258.6044	865.1794	2007.8839
2033	1286.5257	1254.7788	1193.6159	809.6289	1944.6808
2034	1223.1675	1190.6934	1128.3087	755.6764	1876.1347
2035	1159.3401	1126.3936	1063.2827	703.5507	1803.3703
2036	1095.6284	1062.4484	999.0725	653.4463	1727.4514
2037	1032.5546	999.3622	936.1439	605.5194	1649.3686
2038	970.5755	937.5717	874.8927	559.8881	1570.0291
2039	910.0813	877.4464	815.6456	516.6327	1490.2506
2040	851.3966	819.29	758.6633	475.7983	1410.7575

Figura 4.12: Predicciones Kazajistán

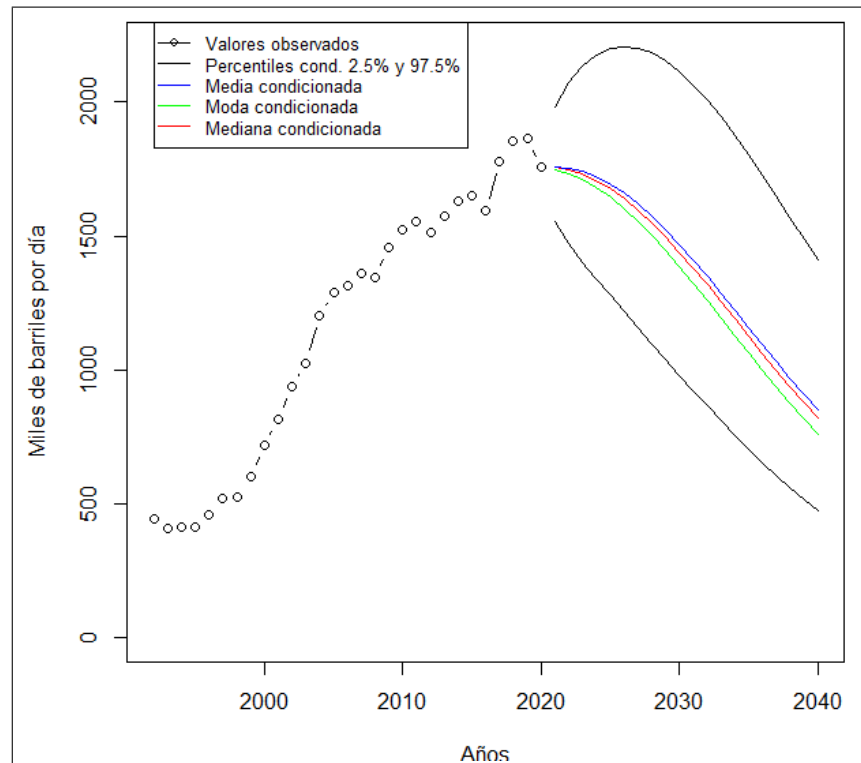


Figura 4.13: Predicciones Kazajistán

Bibliografía

- [1] **Arnold, L.** (1973). *Stochastic differential equations*. John Wiley and Sons.
- [2] **Barrera, A., Román-Román, P., Torres-Ruiz, F.** (2018). *A hyperbolastic type-I diffusion process: Parameter estimation by means of the firefly algorithm*. *BioSystems*, 163, 11-22. [https://doi: 10.3934/mbe.2020043](https://doi.org/10.3934/mbe.2020043).
- [3] **Bhattacharya, R. y Waymire, E.**(1990). *Stochastic Processes with Applications*. New York: Wiley, 1990.
- [4] **Bürger, R., Chowell, G. y Lara, L.**(2019). *Comparative analysis of phenomenological growth models applied to epidemic outbreaks*. *Math. Biosci. Eng.*, 16, 4250–4273. [https://doi:10.3934/mbe.2019212](https://doi.org/10.3934/mbe.2019212).
- [5] **Calin, O.**(2012). *An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*.
- [6] **Capasso, V. y Bakstein, D.**(2005). *An introduction to continuous-time stochastic processes : theory, models, and applications to finance, biology, and medicine*. United States of America: Birkhäuser Boston.
- [7] **Hubbert, M.**(1956). *Nuclear energy and the fossil fuels*. Shell Development Company.
- [8] **Hubbert, M.**(1959). *Techniques of prediction with application to the petroleum industry*. Shell Development Company; 1959.
- [9] **Koya, P. y Goshu, A.**(2013). *Solutions of rate-state equation describing biological growths*. *Am. J. Math. Stat.*, 3 , 305–331. [https:// doi: 10.5923/j.a.jms.20130306.02](https://doi.org/10.5923/j.a.jms.20130306.02).

- [10] **Koya, P. y Goshu, A.**(2013). *Generalized mathematical model for biological growths*. Open J. Model. Simul., 1, 42–53. <https://doi:10.4236/ojmsi.2013.14008>.
- [11] **Luz-Sant’Ana, I.** (2017). *Aportaciones en el estudio de modelos estocásticos de crecimiento para el estudio de la producción de petróleo. Proceso de difusión Hubbert*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [12] **Luz-Sant’Ana, I., Román-Román, P., Torres-Ruiz, F.** (2017). *Modeling oil production and its peak by means of a stochastic diffusion process based on the Hubbert curve*. Energy, 133, 455-470.
- [13] **M. Tabatabai, Z. Bursac y Eby, W.** (2011). *Mathematical modeling of stem cell proliferation*. Med. Biol. Eng. Comput.,49, 253–262. <https://doi:10.1007/s11517-010-0686-y>.
- [14] **Oksendal, B.**(2013). *Stochastic Differential Equations. An introduction with Applications*. <https://doi:10.1007/978-3-642-14394-6>.
- [15] **Pavliotis, G.**(2014). *Stochastic Processes and Applications*. <https://doi:10.1007/978-1-4939-1323-7>.
- [16] **Pawula, R.**(1967). *Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker–Planck equation*. Phys. Rev,162(1):186–188. <http://doi:10.1103/PhysRev.162.186>.
- [17] **Rincón, L.**(2012). *Introducción a los Procesos Estocásticos*. México: UNAM.
- [18] **Román, P. y Torres, F.**(2012). *Modelling logistic growth by a new diffusion process: Application to biological systems*. Bio Systems. 110. 9-21. [10.1016/j.biosystems.2012.06.004](https://doi:10.1016/j.biosystems.2012.06.004).
- [19] **Román, P. y Torres, F.**(2016). *The nonhomogeneous lognormal diffusion process as a general process to model particular types of growth patterns*.
- [20] **Román, P., Serrano, J. y Torres, F.**(2018). *“Some Notes about Inference for the Lognormal Diffusion Process with Exogenous Factors”*. Mathematics 6, no. 5, 85. <https://doi.org/10.3390/math6050085>.

-
- [21] **Tabatatai M., Williams, D. y Bursac, Z.**(2005). *Hyperbolastic growth models: theory and application*. Theor. Biol. Med. Model., 2 , 1–13. <https://doi:10.1186/1742-4682-2-14>.
- [22] **Tabatabai,M., Eby,W. y Singh,K.**(2013). *T model of growth and its application in systems of tumorimmune dynamics*. Math. Biosci. Eng., 10 (2013), 925–938. <https://doi:10.3934/mbe.2013.10.925>.
- [23] **Tuckwell, H. y Koziol, J.**(1987). *Logistic population growth under random dispersal*. Bull. Math. Biol., 49, 495–506, [https://doi:10.1016/S0092-8240\(87\)80010-1](https://doi:10.1016/S0092-8240(87)80010-1).
- [24] U.S. Energy Information Administration. <http://www.eia.gov/beta/international/data/browser>
[Acceso 10 de septiembre del 2021].