Máster en Estadística Aplicada

Trabajo Fin de Máster

Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión. Aplicación a la modelización de la tasa corta de interés y de activos financieros

Carlos Mario García Díaz

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada

Tutor

Prof. Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

Granada, septiembre de 2021

Máster en Estadística Aplicada

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo de investigación presentado por D. Carlos Mario García Díaz y dirigido por el profesor Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

VºBº

Francisco de Asís Torres Ruiz

Carlos Mario García Díaz

ÍNDICE

Capítulo 3. Aplicaciones en el componente económico financiero

Resumen

Este trabajo final de máster en estadística aplicada trata el estudio de ecuaciones diferenciales y procesos de difusión para explicar las dinámicas estocásticas de la tasa corta de interés y de los precios de activos financieros; las cuales se fundamentan, en el presente caso, en el proceso de Wiener.

Para ello, se utiliza el cálculo estocástico basado en Itô, que se usa fundamentalmente para obtener diferenciales estocásticas; el objeto de estudio del cálculo de Itô es la integral estocástica cuya notación simplificada es la ecuación diferencial estocástica. Es relevante notar que, el presente estudio se circunscribe únicamente al análisis de procesos de difusión que son solución a ecuaciones diferenciales estocásticas que contienen una componente determinista y una componente aleatoria o estocástica; esta última, involucra al proceso de Wiener.

Este documento comprende tres capítulos, el primero de éstos dedicado a la conceptualización del proceso de difusión; el segundo centrado en las ecuaciones diferenciales estocásticas y su vínculo con los procesos de difusión; y el tercero, finaliza con aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas y los procesos de difusión en el ámbito económico-financiero.

Las dos aplicaciones que se exponen, de las ecuaciones diferenciales estocásticas y los procesos de difusión en finanzas, datan la modelización estocástica de tasas cortas de interés, tales como los modelos de Vasicek, Rendleman & Bartter, Cox, Ingersoll & Ross, Ho & Lee, Hull & White, Black, Derman & Toy, y Black & Karasinski, y la modelización de precios de activos financieros, la cual incluye modelos de tendencia y volatilidad constante, modelos de tendencia y volatilidad dependiente del tiempo, modelos de promedio aritmético y promedio geométrico sobre precios.

El trabajo incluye como caso práctico los modelos de equilibrio de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross en la modelización de la tasa corta de interés (spot) del mercado colombiano, conocida como tasa interbancaria -TIB. La elección de esta tasa se sustenta en la importancia que tiene las variaciones de los tipos de interés en los mercados financieros y en los mercados de bienes y servicios, y que, por ende, afectan los resultados económicos de empresas, inversionistas, familias y Estado, de forma positiva o negativa, con cierto nivel de impacto. Razonamiento que justifica la modelación apropiada de la evolución de las tasas de interés a través del tiempo con finalidades de: proyección, inversión (financiamiento y cobertura financiera), gestión del riesgo, definición de precios, valuación de activos financieros, decisiones de política monetaria y fiscal.

Introducción

Este trabajo final de máster en estadística aplicada pretende el estudio de ecuaciones diferenciales y procesos de difusión en el componente económico financiero, específicamente modelos para explicar las dinámicas estocásticas de la tasa de interés instantánea, o tasa corta, continuamente compuesta en el tiempo, y de los precios de activos financieros; las cuales se fundamentan en procesos estocásticos, como lo es el movimiento browniano estándar o proceso de Wiener.

Este tipo de procesos no tienen trayectorias derivables, razón por la cual se hace necesario la construcción de una nueva medida diferente al cálculo determinístico de Riemann; esta medida, en este caso, es el cálculo estocástico basado en Itô, construido inicialmente a través de funciones indicadoras, luego funciones escalonadas y, por último, extendido a un espacio de funciones continuas.

Uno de los resultados más importantes del cálculo estocástico es la fórmula de Itô que se usa fundamentalmente para obtener diferenciales estocásticas; el objeto de estudio del cálculo de Itô es la integral estocástica cuya notación simplificada es la ecuación diferencial estocástica. Es relevante notar que, el presente estudio se circunscribe únicamente al análisis de procesos de difusión que son solución a ecuaciones diferenciales estocásticas que contienen una componente determinista y una componente aleatoria o estocástica; esta última, involucra al proceso de Wiener.

Este documento comprende tres capítulos, el primero de éstos dedicado a la conceptualización del proceso de difusión; el segundo centrado en las ecuaciones diferenciales estocásticas y su vínculo con los procesos de difusión; y el tercero, finaliza con aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas y los procesos de difusión en el ámbito económico-financiero.

En el primer capítulo se presentan generalidades sobre los procesos estocásticos, incluyendo las ecuaciones de Chapman Kolmogorov y, las ecuaciones cinéticas adelantada y atrasada; posteriormente, se expone el teorema de Pawula como alternativa de solución para que las ecuaciones diferenciales parciales que hacen parte de las ecuaciones cinéticas anteriormente mencionadas puedan ser resueltas, bien por métodos analíticos o por métodos numéricos; de esta manera, se reescriben las ecuaciones cinéticas bajo la hipótesis de Pawula. Por último, en este capítulo, se define el concepto de proceso de difusión, y se establecen las ecuaciones de Fokker-Plank y de Kolmogorov en dichos procesos.

En el segundo capítulo se aborda la integral estocástica en el sentido de Itô, con sus reglas y propiedades; al igual que, la diferencial estocástica, la fórmula básica de Itô y una extensión de dicha fórmula. El capítulo finaliza con el tema de ecuaciones diferenciales estocásticas, el cálculo de su media y su varianza, la existencia, unicidad y propiedades de la solución, tipos de ecuaciones (exactas, lineales, entre otras), y algunos métodos de resolución.

En el tercer capítulo se desarrollan dos aplicaciones relevantes de las ecuaciones diferenciales estocásticas y los procesos de difusión, la primera, respecto a la modelización estocástica de tasas cortas de interés, tales como los modelos de Vasicek (1977), Rendleman & Bartter (1980), Cox, Ingersoll & Ross (1985), Ho & Lee (1986), Hull & White (1990), Black, Derman & Toy (1990), y Black & Karasinski (1991), caracterizados como modelos de un factor (dicho factor es la tasa corta), los cuales suponen que la tasa sigue un proceso continuo markoviano. La segunda, en relación con la modelización de precios de activos financieros, la cual incluye modelos de tendencia y volatilidad constante, modelos de tendencia y volatilidad dependiente del tiempo, modelos de promedio aritmético y promedio geométrico sobre precios.

El capítulo tres finaliza con un caso práctico que relaciona los modelos de equilibrio de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross en la modelización de la tasa corta de interés (spot) del mercado colombiano, conocida como tasa interbancaria -TIB. El supuesto de Vasicek es que la tasa de interés de corto plazo sigue una caminata aleatoria con reversión a la media representada en la ecuación diferencial estocástica: $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$ y donde el precio de mercado del riesgo $\lambda(t,r) = \lambda$ es constante; $a(b - r_t)$ representa una fuerza que lleva al proceso hacia su media de largo plazo b con una magnitud proporcional a la desviación del proceso desde la media y, la constante a representa la velocidad de ajuste; respecto al término estocástico $\sigma dW_t,$ este hace que el proceso fluctúe alrededor de b de forma aleatoria y continua; en este caso, las tasas de interés son gaussianas, lo cual, en la actualidad, es una ventaja del modelo dado que existen tasas de interés negativas, lo que lo hace útil en la descripción y explicación de este tipo de fenómenos. Mientras que, el supuesto de Cox-Ingersoll-Ross es que la tasa sigue una caminata aleatoria con reversión a la media representada en la ecuación diferencial estocástica: $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$ y donde el precio de mercado del riesgo $\lambda(t,r) = \eta\sqrt{r_t}$ deja de ser constante; en este caso, las tasas de interés son siempre no negativas, conducidas por una Chi cuadrada no central.

La elección de la tasa corta de interés TIB, como caso práctico, se sustenta en la importancia que tiene las variaciones de los tipos de interés en los mercados financieros y en los mercados de bienes y servicios, y que, por ende, afectan los resultados económicos de empresas, inversionistas, familias y Estado, de forma positiva o negativa, con cierto nivel de impacto. Razonamiento que justifica la modelación apropiada de la evolución de las tasas de interés a través del tiempo con finalidades de: proyección, inversión (financiamiento y cobertura financiera), gestión del riesgo, definición de precios, valuación de activos financieros, decisiones de política monetaria y fiscal, entre otros.

Una importante característica del presente trabajo es la exposición, por parte del autor, de un sinnúmero de ejemplos respecto a: (i) la aplicación de las propiedades de las diferenciales estocásticas, (ii) la fórmula de Itô, (iii) el cálculo de media y varianza, (iv) la solución de los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas, (v) modelos de tipos de interés y, (vi) modelos de precios de activos financieros; algunos de estos ejemplos aparecen enunciados como ejercicios propuestos en el artículo de "*An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance*" escrito por Calin (2012), y han sido desarrollados con detalle en este trabajo.

También se exhibe el desarrollo matemático de modelos como el de Black, Derman & Toy y el de Black & Karasinski con cierto nivel de detalle cuantitativo.

Al igual que, se presenta el código en R de la aplicación de dos de los modelos analizados, el de Vasicek y el de Cox-Ingersoll-Ross. Llegando a las soluciones: respecto a Vasicek, $r_t = 1.8339 + (r_0 - 1.8339)e^{-0.0149t} + 0.0190 \int_0^t e^{-0.0149(t-s)} dW_s$ y a Cox-Ingersoll-Ross, $r_t = 1.9853 + 0.0281t - 0.0146 \int_0^t r_s ds + 1.5328 \int_0^t \sqrt{r_s} dW_s$. Modelando así la tasa interbancaria del mercado colombiano.

Capítulo 1. Procesos de difusión

En este trabajo se abordará el estudio de procesos de difusión unidimensionales; éstos son un caso particular de los procesos de Markov en tiempo continuo y con espacio de estados continuo, los cuales se explicarán más adelante.

1.1.- Generalidades sobre procesos estocásticos

La medición del nivel de agua durante un intervalo $[t_0, T]$; la descripción del movimiento en forma errática de una partícula de materia inorgánica suspendida en el agua o en otros líquidos en función del tiempo; el estudio del comportamiento aleatorio de las variables financieras en un periodo determinado: tasas de interés, precios de activos, tipos de cambio, índices bursátiles, entre otros, hace necesario considerar simultáneamente una familia de variables aleatorias que dependen de un parámetro continuo (por ejemplo: el tiempo) con el propósito de modelar sus trayectorias (o realizaciones del proceso). Esto es, un modelo matemático respecto al comportamiento en el tiempo, de estos fenómenos aleatorios, se considera un proceso estocástico.

1.1.1.- Definición de proceso estocástico y conceptos generales

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definidas sobre dicho espacio. Esa familia de variables estará indexada por un parámetro t que varía en un conjunto ordenado de índices T denominado el espacio paramétrico. De esta forma, se denota al proceso como $\{X(t, \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$. En lo que sigue, se supone que T es un subconjunto de $\mathbb{R}$, bien sea un intervalo o un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Para cada $t \in T$, $X(t)$ es una variable aleatoria que toma valores en un subconjunto de $\mathbb{R}$ (o de $\mathbb{R}^n$) lo que se denomina espacio de estados, el cual es un espacio medible considerando la σ-algebra de Borel, o la restricción correspondiente al subconjunto en cuestión.

Según el espacio paramétrico considerado, sea discreto o continuo, se puede hacer una primera clasificación de procesos estocásticos, diferenciando entre procesos en tiempo discreto y procesos en tiempo continuo, respectivamente. Dentro de cada clase anterior se puede hacer otra clasificación atendiendo al espacio de estados. Así, si las variables del proceso son discretas se habla de proceso estocástico discreto, mientras que, si son continuas se habla de proceso estocástico continuo.

Por otro lado, para cada valor $\omega \in \Omega$, se puede considerar el conjunto $\{X(t, \omega): t \in T\}$, que será un subconjunto de $\mathbb{R}$ (o de $\mathbb{R}^n$) lo que se denomina la trayectoria muestral asociada a ω. De esta forma, si se nota por $\mathbb{R}^T$ al conjunto de funciones de T en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^n$), se puede considerar una aplicación de Ω en $\mathbb{R}^T$ que a cada valor ω le asigna su trayectoria; esto es,

$$X: \Omega \to \mathbb{R}^T$$
$$\omega \to X(\omega): T \to \mathbb{R}$$
$$t \to X(t,\omega)$$

Puesto que, $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, surge la tarea de estudiar la medibilidad de X. Para ello, es necesario construir una σ-algebra en $\mathbb{R}^T$, lo cual se resuelve mediante la σ-algebra minimal sobre los rectángulos medibles definidos en $\mathbb{R}^T$, que se llamará $\mathbb{B}^T$.

Una vez realizada dicha construcción, el teorema de medibilidad resuelve la cuestión planteada en el siguiente sentido:

$$X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T) \text{ es medible} \Leftrightarrow X(t,\omega): (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \text{ es medible } \forall t \in T$$

El teorema de medibilidad permite establecer una definición más rigurosa de Proceso Estocástico en el siguiente sentido: Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ y un conjunto ordenado T, un proceso estocástico es una función medible

$$X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \to (\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T).$$

Asimismo, la medibilidad de X permite definir una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T)$ que da origen a lo que se denomina la distribución de probabilidad del proceso, y que viene dada por $\mathcal{P}_x(\mathcal{B}) = \mathcal{P}\left(X^{-1}(\mathcal{B})\right)$, $\forall \mathcal{B} \in \mathbb{B}^T$. Así $\mathcal{P}_x$ es la distribución conjunta de las distribuciones que conforman el proceso, por lo que, el estudio de un proceso se reduce al estudio de su distribución. No obstante, el teorema de consistencia asegura que el estudio se puede reducir al de la distribución conjunta de cualquier colección finita de variables del proceso, a cuyas distribuciones se les conoce como distribuciones finito-dimensionales del proceso.

Lo que sigue está centrado en procesos en tiempo continuo y con espacio de estados continuo. Asimismo, y para no recargar la notación cuando ello no lleve a confusión, los procesos serán notados en la forma $\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$.

1.1.2.- Algunos tipos de procesos estocásticos

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las distintas posibilidades para el espacio paramétrico, el espacio de estados, las características de las trayectorias y, principalmente, las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso.

A continuación, se definen algunos tipos de procesos estocásticos atendiendo a algunas características concretas asociadas a éstos. Se considera para ello

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ un proceso estocástico real valuado y definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

1.1.2.1.- Procesos con incrementos independientes

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ se dice que tiene incrementos independientes si $\forall n \in \mathbb{N}$, y para cualesquiera $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes. Esto quiere decir que, los desplazamientos que tiene el proceso en estos intervalos disjuntos de tiempo son independientes unos de otros.

1.1.2.2.- Procesos estrictamente estacionarios

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ se dice estrictamente estacionario si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in T$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$ y $A_1, \ldots, A_n \in A$ se verifica

$$P(X(t_1 + h) \in A_1, \ldots, X(t_n + h) \in A_n) = P(X(t_1) \in A_1, \ldots, X(t_n) \in A_n)$$

Esto es, la distribución del vector $\left(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\right)$ es la misma que la del vector $\left(X(t_1 + h), X(t_2 + h), \ldots, X(t_n + h)\right)$, lo que significa que las distribuciones finito dimensionales del proceso son invariantes frente a una traslación en el espacio paramétrico. Además, se tiene:

1. Si existe la función media entonces es constante ya que las distribuciones unidimensionales coinciden.
2. Si los momentos de segundo orden existen, la función de covarianza depende solo de la diferencia $t - s$. En efecto, como las distribuciones bidimensionales $\left(X(s), X(t)\right)'$ y $\left(X(s+h), X(t+h)\right)'$ coinciden para todo h, entonces $Cov[X(s), X(t)] = Cov[X(s+h), X(t+h)]$ y tomando $h = -s$ se verifica $C_x(s,t) = C_x(0, t-s)$.

1.1.2.3.- Procesos con incrementos estacionarios

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ se dice tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera tiempos $s < t$ y $\forall h \in \mathbb{R}$, las variables $X(t+h) - X(s+h)$ y $X(t) - X(s)$ tienen la misma distribución de probabilidad. Es decir, el incremento que tiene el proceso entre los tiempos s y t sólo depende de estos tiempos a través de la diferencia $t - s$, y no de los valores específicos de s y t.

1.1.2.4.- Procesos débilmente estacionarios

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$, cuyos momentos de segundo orden existen (proceso de segundo orden), es débilmente estacionario si: *i)* la función media es constante, y *ii)* la función de covarianza depende sólo de la diferencia $t - s$.

Es importante notar que, todo proceso estrictamente estacionario es débilmente estacionario pero el recíproco no es cierto.

1.1.2.5.- Procesos Martingalas

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ es un martingala si para cualesquiera $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$ se verifica $E[X(t_n)|X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_{n-1})] = X(t_{n-1})$ *(c.s.)*. En otras palabras, esta igualdad significa que el valor promedio del proceso al tiempo t_n es el valor del proceso en su último momento observado, es decir, $X(t_{n-1})$.

Se trata de una ley de movimiento aleatorio que es equilibrada o simétrica, pues en promedio el sistema no cambia del último momento observado; conocido también como procesos de juegos justos.

Si la igualdad se cambia por ≤ se dirá que $\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ es un supermartingala y si se cambia por ≥ se dirá que es una submartingala.

1.1.2.6.- Procesos de Lévy

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ es un proceso de Lévy si sus incrementos son independientes y estacionarios.

1.1.2.7.- Procesos de Markov

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ se dice de Markov si $\forall n \geq 0$ y para cualesquiera $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} \in T$ y estados $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ $(pasado), x_n(presente), x_{n+1}(futuro)$ se tiene

$$P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1}|X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0)$$
$$= P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1}|X(t_n) = x_n).$$

La propiedad que define a este tipo de procesos se conoce como propiedad de Markov e indica que el comportamiento del proceso en el instante $t = t_{n+1}$ sólo depende del estado del proceso en $t = t_n$, por lo que se prescinde de la información que se tiene del proceso antes de t_n.

1.1.2.8.- Proceso gaussiano

$\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ se dice gaussiano si cualquier combinación lineal finita de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_i X(t_i)$ es una variable normal unidimensional.

El siguiente resultado proporciona una caracterización en términos de las distribuciones finito-dimensionales del proceso.

Un proceso estocástico $\{X(t): t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ es gaussiano si y sólo si se verifica:

1. Es de segundo orden, esto es, $E[X(t)^2] < \infty, \forall t \in T$.
2. Para cualquier colección finita $\{t_1, \ldots, t_n\}$ con $t_i \in T$ y $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$

$$E\left[exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right] = exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, m_X(t_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_j\lambda_l C_X\,(t_j, t_l)\right)$$

donde $m_X(t_j) = \mathrm{E}[X(t_j)]$ y $C_X(t_j, t_l) = \mathrm{Cov}[X(t_j), X(t_l)]$.

Esto muestra que los procesos gaussianos vienen determinados a partir de la funciones media y covarianza, siendo normales las distribuciones finito-dimensionales (en el segundo apartado se muestra la función característica del vector $(X(t_1), \ldots, X(t_n))'$, $\forall n$). Además, este apartado garantiza poder tratar las mismas aún en el caso de que la matriz de covarianzas sea semidefinida positiva.

1.2.- Proceso de difusión. Ecuaciones de Kolmogorov

Como es conocido, el Teorema de Consistencia de Kolmogorov indica que la distribución de probabilidad del proceso $\{X(t,\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ está determinada por las distribuciones n dimensionales de $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ para cualquier n y cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in T$. Además, puesto que la propiedad de Markov indica que el comportamiento del proceso en el instante $t = t_n$ solo depende del estado del proceso en el instante $t = t_{n-1}$.

Por otro lado, dados dos instantes $s, t \in T$ tales que $s < t$, las probabilidades condicionadas $P(X(t) \in A | X(s) = x)$ se conocen con el nombre de probabilidades de transición, donde x es un valor del espacio de estados. Esta es una función de cuatro variables que se notará como $P(A, t;\ x, s) = P(X(t) \in A | X(s) = x)$ la cual verifica las siguientes propiedades:

$P(A, t; ., s)$ es una función medible sobre el espacio de estados (considerando sobre éste la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}$) para $\forall\ s, t \in T$ tal que $s < t$ y para $\forall A \in \mathcal{B}$.

$P(., t; x, s)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}$, para todo x en el espacio de estados y para $\forall\ s, t \in T$ tal que $s < t$.

Ecuación de Chapman-Kolmogorov: para $\forall\ s, u, t \in T$ tal que $s \le u \le t$, $\forall\ A \in \mathcal{B}_E$ y $\forall\ x$ se verifica:

$$P(A, t;\ x, s) = \int P(B, t; y, u) P(dy, u; x, s)$$

donde la integral se extiende sobre el espacio de estados.

Continuando con procesos en tiempo continuo y con espacio de estados continuo, se supondrá que existen las densidades asociadas a las distribuciones anteriores. Por lo tanto, se llamará $f(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n)$ a las densidades asociadas a las distribuciones n dimensionales $\left(X(t_1),\ldots,X(t_n)\right)'$, mientras que por $f(x,t|y,s)$ se notará a las densidades de transición, asociadas a las probabilidades de transición anteriores.

En este caso, la propiedad de Markov se escribe

$$f(x_n,t_n|x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_{n-1},t_{n-1}) = f(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\ \forall\, t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T,$$

Mientras que, la Ecuación de Chapman-Kolmogorov adopta la siguiente expresión:

$$f(x,t|y,s) = \int f(x,t|z,\tau)\, f(z,\tau|y,s)dz, \quad \forall x,y, \qquad \forall\, s \leq \tau \leq t$$

Ésta indica que la transición, desde el estado y en el instante s al estado x en el instante t, puede analizarse en dos etapas pasando a través de un estado arbitrario z en un instante de tiempo arbitrario τ intermedio entre s y t.

Además, la propiedad de Markov permite que a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones se tenga cualquier distribución finito dimensional. En efecto, si se considera $t_0 \in T$ el origen del espacio paramétrico se verifica:

$$\begin{aligned} f(x_0,t_0;x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n) &= f(x_0,t_0;\ldots;x_{n-1},t_{n-1}) f(x_n,t_n|x_0,t_0;\ldots;x_{n-1},t_{n-1}) =\ldots \\ &= f(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}) f(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\ldots f(x_1,t_1|x_0,t_0) f(x_0,t_0) \end{aligned}$$

Por último, un caso particular interesante es aquél en el que las probabilidades de transición verifican la propiedad:

$$P(A,t;\ x,s) = P(A,t+h;\ x,s+h), \quad \forall x,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \forall s \leq t,\ \forall h \in \mathbb{R}$$

en cuyo caso se dice que las probabilidades de transición son estacionarias y el proceso de Markov se dice *homogéneo en el tiempo*.

Observe que en este caso las probabilidades de transición (y también las densidades si estas existen) dependen de $t-s$ (basta considerar $h=-s$ en la propiedad anterior).

A continuación, se muestran algunos resultados básicos interesantes sobre procesos de Markov, algunos de los cuales están relacionados con otros tipos de procesos:

1. Sea $\{X(t): t \in T\}$ un proceso de Markov y g una función medible Borel con inversa. Entonces $\left\{g\left(X(t)\right): t \in T\right\}$ es un proceso de Markov.
2. Si $\{X(t): t \in T\}$ es un proceso de Markov con incrementos independientes y media constante entonces es una Martingala.
3. Si $\{X(t): t \in T\}$ es un proceso con incrementos independientes para el cual existen las densidades finito-dimensionales entonces es de Markov.

1.2.1.- Ecuaciones cinéticas para procesos markovianos y no markovianos

Sea $\{X(t): t \in T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo con espacio de estados continuo. Se supondrá que existen las funciones de densidad de transición, $f(x,t|y,s)$, las cuales verifican (al igual que las distribuciones de transición) la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$f(x,t|y,s) = \int f(x,t|z,\tau)\, f(z,\tau|y,s)dz,$$

donde $s < \tau < t$ son instantes arbitrarios en los que se verifica $X(t) = x,\ X(\tau) = z$, $X(s) = y$, y donde la integral se extiende al espacio de estados asociado al proceso.

Esta ecuación puede ser vista como una relación de compatibilidad verificada por cualquier proceso de Markov, pero no es suficiente para determinar las densidades de probabilidad de transición. La idea que se desarrolla a continuación es obtener una forma diferencial de la ecuación anterior cuya posible solución proporcione tal densidad. Para ello, se toma en la ecuación anterior los instantes de tiempo $s < t < t + \Delta t$ con $X(s) = y,\ X(t) = z,\ X(t+\Delta t) = x$. Con ello

$$f(x,t+\Delta t|y,s) = \int f(x,t+\Delta t|z,t)\, f(z,t|y,s)dz,$$

Ahora restando $f(x,t|y,s)$ de ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$f(x,t+\Delta t|y,s) - f(x,t|y,s) = \int f(x,t+\Delta t|z,t)\, f(z,t|y,s)dz - f(x,t|y,s).$$

Sea ahora $\mathcal{R}$ una función que verifique que tienda a cero, junto con sus derivadas de cualquier orden, de forma suficientemente rápida en los límites del espacio de estados considerado. Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por $\frac{\mathcal{R}(x)}{\Delta t}$ e integrando sobre el espacio de estados se verifica

$$\mathcal{R}(x)\frac{f(x,t+\Delta t|y,s) - f(x,t|y,s)}{\Delta t} = \frac{\mathcal{R}(x)}{\Delta t}\int f(x,t+\Delta t|z,t)\, f(z,t|y,s)dz - \frac{\mathcal{R}(x)}{\Delta t} f(x,t|y,s)$$

$$\int \mathcal{R}(x)\frac{f(x,t+\Delta t|y,s) - f(x,t|y,s)}{\Delta t}dx = \frac{1}{\Delta t}\int \mathcal{R}(x)\left(\int f(x,t+\Delta t|z,t)\, f(z,t|y,s)dz\right)dx - \frac{1}{\Delta t}\int \mathcal{R}(x) f(x,t|y,s)dx.$$

Ahora se considera el desarrollo en series de Taylor de la función $\mathcal{R}$ en un entorno de z, se supondrá que existe la derivada de $f(x,t|y,s)$ respecto a t (que se supone continua), se sustituye en la ecuación anterior y se toma límites cuando $\Delta t \to 0$. De esta forma se tendrá

$$\int \mathcal{R}(x)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}dx$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int\left[\mathcal{R}(z)\right.\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}^{n)}(z)\frac{(x-z)^n}{n!}\right]\left(\int f(x,t+\Delta t|z,t)\,f(z,t|y,s)dz\right)dx$$
$$\left.-\frac{1}{\Delta t}\int \mathcal{R}(x)f(x,t|y,s)dx\right\}$$
$$=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \mathcal{R}^{n)}(z)f(z,t|y,s)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (x-z)^n f(x,t$$
$$\left.+\Delta t|z,t)dx\right)dz$$

Se supone ahora que existen todos los momentos de los incrementos condicionados

$$E\left[\big(X(t+\Delta t)-X(t)\big)^n|X(t)=z\right]=\int (x-z)^n f(x,t+\Delta t|z,t)dx,$$

Así como los límites de dichos momentos cuando $\Delta t\to 0$. Llamando $A_n(z,t)$ a esos límites, la expresión anterior que involucra límites queda en la forma

$$\int \mathcal{R}(x)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}dx=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \mathcal{R}^{n)}(z)f(z,t|y,s)A_n(z,t)dz$$

Ahora bien, supuesto que la función $f(z,t|y,s)A_n(z,t)$ es infinitamente derivable con derivadas continuas y acotadas, si se integra por partes en el miembro derecho de la expresión anterior (y si se identifica $z=x$), se tiene

$$\int \mathcal{R}^{n)}(z)f(z,t|y,s)A_n(z,t)dz=(-1)^n\int \mathcal{R}(x)\frac{\partial^n[A_n(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^n}dx$$

Por lo que,

$$\int \mathcal{R}(x)\left\{\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}-\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n[A_n(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^n}dx\right\}=0$$

y dada la arbitrariedad de la función $\mathcal{R}$, se concluye

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{R}(x)\frac{\partial^n[A_n(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^n}$$

en casi todo punto y, puesto que las derivadas son continuas, en todo punto. La ecuación obtenida es la denominada *Ecuación Cinética Adelantada*.

Nota: las funciones $A_n(x,t)$ son conocidas como los momentos infinitesimales del proceso. Puesto que,

$$A_n(x,t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (y-x)^n f(y,t+\Delta t|x,t)dy$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E\left[\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)^n|X(t)=x\right],$$

en particular, para un intervalo de tiempo pequeño Δt, se tiene

$$E[\Delta X(t)|X(t)=x] \approx A_1(x,t)\Delta t$$

así como

$$E\left[\left(\Delta X(t)\right)^2|X(t)=x\right] \approx A_2(x,t)\Delta t$$

por lo que,

$$Var[\Delta X(t)|X(t)=x] \approx E\left[\left(\Delta X(t)\right)^2|X(t)=x\right] - (E[\Delta X(t)|X(t)=x])^2$$

$$Var[\Delta X(t)|X(t)=x] \approx A_2(x,t)\Delta t - (A_1(x,t)\Delta t)^2$$

$$Var[\Delta X(t)|X(t)=x] \approx A_2(x,t)\Delta t - [A_1(x,t)]^2(\Delta t)^2$$

y con esto,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Var[\Delta X(t)|X(t)=x]}{\Delta t} = A_2(x,t)$$

Así pues, es habitual llamar a $A_1(x,t)\Delta t$ la media infinitesimal *(o drift)* del proceso y a $A_2(x,t)$ la varianza infinitesimal. Es importante notar que, lo que se está considerando son los momentos de los incrementos condicionados del proceso. Asimismo, si el proceso es homogéneo entonces sus densidades de transición sólo dependen de la diferencia entre el instante presente y el inicial, o sea, $f(y,t+\Delta t|x,t) = f(y,\Delta t|x,0)$, por lo que los momentos infinitesimales no dependen del tiempo.

En el desarrollo anterior se puede cambiar los papeles de las variables involucradas en el mismo. Se puede ver que en la ecuación

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{R}(x)\frac{\partial^n[A_n(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^n}$$

se han considerado las derivadas de la densidad de transición respecto del instante presente t y el estado presente x, mientras que s y y funcionan como parámetros. Por tanto, para obtener otra forma diferencial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov se intercambian los papeles de esas variables. Considere los instantes de tiempo $s-\Delta s < s < t$, en los cuales se verifica $X(s-\Delta s) = y, X(s) = z$ y $X(t) = x$.

Con ello la ecuación de Chapman-Kolmogorov queda en la forma

$$f(x,t|y,s-\Delta s) = \int f(x,t|z,s)\, f(z,s|y,s-\Delta s)dz$$

Ahora bien, $f(x,t|y,s)$ se puede reescribir como

$$f(x,t|y,s) = \int f(x,t|y,s)\, f(z,s|y,s-\Delta s)dz,$$

dado que, $f(x,t|y,s) = f(x,t|y,s)\int f(z,s|y,s-\Delta s)dz$, y $\int f(z,s|y,s-\Delta s)dz = 1$.

por lo que,

$$f(x,t|y,s-\Delta s) - f(x,t|y,s) \\ = \int f(x,t|z,s)\, f(z,s|y,s-\Delta s)dz - \int f(x,t|y,s)\, f(z,s|y,s-\Delta s)dz$$

$$f(x,t|y,s-\Delta s) - f(x,t|y,s) = \int f(z,s|y,s-\Delta s)[f(x,t|z,s) - f(x,t|y,s)]\, dz$$

Ahora se desarrolla $f(x,t|z,s)$ (como función de z) en un entorno de y se tendrá

$$f(x,t|y,s-\Delta s) - f(x,t|y,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x,t|y,s)}{\partial y^n}\int f(z,s|y,s-\Delta s)\,(z-y)^n dz$$

Por último, dividiendo en la expresión anterior por $-\Delta s$ y tomando límite cuando Δs tiende a cero, se concluye (supuesto que todas las operaciones se puedan realizar) que

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(y,s)}{n!}\frac{\partial^n f(x,t|y,s)}{\partial y^n}$$

que constituye la llamada *Ecuación Cinética Atrasada*.

Nota: Observe que en la ecuación cinética adelantada las variables iniciales están fijas mientras que en la atrasada se describe el desarrollo del proceso que conduce a un estado asignado en el instante presente.

1.2.2.- Teorema de Pawula. Ecuaciones de Fokker-Planch y Kolmogorov

¿Qué se puede hacer con las ecuaciones cinéticas adelantada y atrasada? Poco, dada la presencia de derivadas de alto orden con respecto a la variable de estado. La situación sería distinta si las ecuaciones presentarán un número finito, y de ser posible pequeño, de términos. Ello puede verificarse si, por ejemplo, los momentos infinitesimales fueran cero a partir de un cierto n en adelante. De esta manera estaríamos frente a ecuaciones diferenciales parciales que se podrían resolver, bien por métodos analíticos o por métodos numéricos.

El siguiente resultado, debido a Pawula (1967), nos proporciona una condición suficiente para que se verifique la situación que se acaba de presentar, y es válido tanto para procesos markovianos como para procesos no markovianos, aclarando que en este caso sólo se consideran procesos de Markov.

Si $A_n(x,t) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, y si $A_n(x,t) = 0$ para algún n par, entonces $A_n(x,t) = 0$ $\forall n \geq 3$.

Así, bajo esta hipótesis, las ecuaciones cinéticas quedan de la forma:

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = \frac{\partial [A_1(x,t) f(x,t|y,s)]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 [A_2(x,t) f(x,t|y,s)]}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} + A_1(y,s)\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial y} + \frac{A_2(y,s)}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0$$

Adelantada (o de Fokker-Planck) y Atrasada (o de Kolmogorov), respectivamente.

1.2.3.- Definición de proceso de difusión

Sea $F(x,t|y,s)$ la función de distribución de transición, entonces, un proceso de Markov $\{X(t): t_0 \leq t \leq T\}$ en tiempo continuo y con espacio de estados continuo se dice que es un proceso de difusión si tiene trayectorias continuas casi seguro y $\forall x$ y $\forall \epsilon > 0$ se verifica

1. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|>\epsilon} F(dy, t+h|x,t) = 0$
2. Existen funciones $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ tales que,
    a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|\leq\epsilon} (y-x) F(dy, t+h|x,t) = A_1(x,t)$
    b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|\leq\epsilon} (y-x)^2 F(dy, t+h|x,t) = A_2(x,t)$

Esta primera condición significa que grandes cambios en un corto espacio de tiempo son poco probables. Además, esta condición implica la continuidad en probabilidad, por lo que es una condición más fuerte que ésta. En efecto,

$$\begin{aligned} P(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon) &= E\big[P\big(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon | X(t)\big)\big] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y-x|>\epsilon} F(dy, t+h|x,t) \right) F(dx,t) \end{aligned}$$

por lo que basta con aplicar el teorema de la convergencia dominada ya que $\left(\int_{|y-x|>\epsilon} F(dy, t+h|x,t)\right)$ está acotada y converge a cero.

Obsérvese que las funciones $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ no se corresponden exactamente con los momentos infinitesimales anteriormente introducidos, sino que son los momentos truncados de los incrementos condicionados. La razón de su empleo en esta definición radica en que siempre existen mientras que para los otros no se tiene asegurada siempre su existencia. Posteriormente, se verá que la denominación de momentos infinitesimales se puede mantener aún en el caso de ser truncados.

En la definición de proceso de difusión aparecen sólo dos primeros momentos truncados. Ello no es casualidad ya que, en general, los de orden superior son nulos. En efecto, sea $r > 2$, $\epsilon > 0$, $\theta > 0$, $t \in [t_0, T]$ y x perteneciente al espacio de estados. Entonces se verifica

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \le \epsilon} (y-x)^r F(dy, t+h|x,t) = 0.$$

A partir de la definición anterior puede ser complicado, en determinadas condiciones, comprobar que un determinado proceso sea de difusión. El siguiente resultado proporciona unas condiciones suficientes para que un proceso sea de difusión.

Sea $\{X(t): t_0 \le t \le T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo y con espacio de estados continuo y con trayectorias continuas casi seguro y verificando las condiciones

1. existe $\delta > 0$ tal que $\forall x$ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^{2+\delta} F(dy, t+h|x,t) = 0$,
2. existen funciones $A_1(x,t)$ y $A_2(x,t)$ tales que $\forall x$
   a) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int (y-x) F(dy, t+h|x,t) = A_1(x,t)$
   b) $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^2 F(dy, t+h|x,t) = A_2(x,t)$

Entonces $\{X(t): t_0 \le t \le T\}$ es un proceso de difusión.

Si se asumen las condiciones anteriores para verificar que un proceso sea una difusión, no podemos asegurar que, de existir, los momentos infinitesimales de orden superior a dos sean nulos (como sí ocurre con los momentos infinitesimales truncados). Lo que sí es cierto es que, del hecho anterior, los momentos infinitesimales de orden 1 y 2 (de existir y con la condición anterior) coinciden con los truncados. De esta forma se justifican los nombres de media y varianza infinitesimal para las funciones A_1 y A_2 en el sentido de ser la media y la varianza, por unidad de tiempo, del incremento condicionado (en caso contrario deberían llamarse media y varianza infinitesimal truncados).

1.2.4.- Ecuaciones de Kolmogorov y Fokker-Plank en los procesos de difusión

Los procesos de difusión verifican la ecuación atrasada (o de Kolmogorov).

Sea $\{X(t): t_0 \le t \le T\}$ un proceso de difusión. Se asume que para cada (x,t), $F(x,t|y,s)$ es dos veces derivable respecto de y, siendo dichas derivadas continuas y acotadas. Entonces $F(x,t|y,s)$ es derivable respecto a s y verifica la ecuación atrasada

$$\frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial s} + A_1(y,s) \frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial y} + \frac{A_2(y,s)}{2} \frac{\partial^2 F(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición $\lim_{s \to t} F(x,t|y,s) = \lim_{s \to t} P[X(t) \leq x | X(s) = y] = \begin{cases} 1 \; si \; x \geq y \\ 0 \; si \; x < y \end{cases}$

En caso de existir las densidades de transición, se verifica la ecuación atrasada para ellas y con condición inicial $\lim_{s \to t} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$

Ya que la función delta de Dirac $\delta(x-y)$ es la derivada de la función de distribución $F(x,t|y,s)$.

Los procesos de difusión verifican la ecuación adelantada (o de Fokker-Planck).

Sea $\{X(t): t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión. Se asume que existen las derivadas

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}, \frac{\partial [A_1(x,t) f(x,t|y,s)]}{\partial x} \;\; y \;\; \frac{\partial^2 [A_2(x,t) f(x,t|y,s)]}{\partial x^2}$$

y son continuas. Entonces $f(x,t|y,s)$ verifica la ecuación adelantada

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x,t) f(x,t|y,s)]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 [A_2(x,t) f(x,t|y,s)]}{\partial x^2}, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición $\lim_{t \to s} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$.

Ejemplo 1: El proceso de Wiener es una difusión con momentos infinitesimales $A_1(x,t)$=0 y $A_2(x,t) = 1$. Por lo tanto, sus densidades de transición verifican las ecuaciones diferenciales atrasada

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial y^2} = 0, \quad \lim_{s \to t} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$$

Y adelantada

$$\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t|y,s)}{\partial x^2} = 0, \quad \lim_{t \to s} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$$

Es importante notar que, la ecuación adelantada es la denominada ecuación de calor.

También, es relevante notar que, los momentos infinitesimales determinan al proceso de difusión. Se supone que los momentos infinitesimales A_1 y A_2 verifican, para todo valor x del espacio de estados y $\forall t \in [t_0, T]$, las siguientes condiciones:

1. Existen unas constantes positivas σ_0 y k tales que
   - $|A_1(x,t)| \leq k\sqrt{1+x^2}$.
   - $0 < \sigma_0 < \sqrt{A_2(x,t)} \leq k\sqrt{1+x^2}$.
2. Existen constantes positivas γ y k tales que

- $|A_1(x,t) - A_1(y,t)| \leq k|x-y|^{\gamma}$.
- $\left|\sqrt{A_2(x,t)} - \sqrt{A_2(y,t)}\right| \leq k|x-y|^{\gamma}$.

Entonces se verifica:

1. La ecuación atrasada tiene una única solución sujeta a la condición frontera $\lim_{s \to t} F(x,t|y,s) = \lim_{s \to t} P[X(t) \leq x | X(s) = y] = \begin{cases} 1 \; si \; x \geq y \\ 0 \; si \; x < y \end{cases}$. Además, para $t > s$, $F(x,t|y,s)$ es derivable respecto de x, por lo que admite densidad, que también verificará la ecuación atrasada con condición frontera del tipo delta de Dirac $\lim_{s \to t} f(x,t|y,s) = \delta(x-y)$.
2. Existe un proceso de Markov $\{X(t): \leq t \in [t_0, T]\}$ con trayectorias continuas, que verifica las condiciones de proceso de difusión y que tiene por función de distribución de transición $F(x,t|y,s)$.
3. Si, además, las condiciones del enunciado son cumplidas por
$$\frac{\partial A_1(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x} \;\; y \;\; \frac{\partial^2 A_2(x,t)}{\partial x^2},$$
entonces la función $f(x,t|y,s) = \frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial x}$ es la única solución fundamental de la ecuación adelantada.
4. Si $\gamma = 1$, entonces $f(x,t|y,s)$ es la densidad de transición de la única solución de la ecuación integral estocástica

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} A_1(X(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} \sqrt{A_2(X(s),s)}dW(s).$$

Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas, integral estocástica y procesos de difusión

Una ecuación diferencial estocástica puede verse como una notación simplificada de una integral estocástica.

Como se sabe, en el caso determinístico la solución del problema:

$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t)$, con valores iniciales: $x_{t_0} = c$,

donde f es una función continua, es equivalente a la solución de la ecuación integral:

$$x_t = c + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)ds$$

De forma análoga, el análisis de sistemas estocásticos dinámicos conduce con frecuencia a ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t) + G(X_t, t)\xi_t$$

donde ξ_t es un ruido blanco y f, G son funciones continuas. ξ_t no es un proceso estocástico usual, si bien su integral indefinida puede identificarse con el proceso de Wiener W_t como:

$$W_t = \int_0^t \xi_s \, d_s$$

lo que equivale, en notación simplificada, a la ecuación diferencial: $dW_t = \xi_t d_t$.

En el mismo sentido que en el caso determinístico, esta penúltima ecuación diferencial estocástica, puede transformarse en la ecuación integral:

$$X_t = c + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f\,(x_s, s)\,ds}_{Integral\ Riemann-Stieltjes} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} G\,(X_s, s)\,\xi_s\,ds}_{Integral\ Estocástica\ de\ Itô}$$

Reemplazando $\xi_s ds$, se tiene:

$$X_t = c + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)ds + \int_{t_0}^{t} G(X_s, s)\,dW_s$$

donde c es una variable aleatoria arbitraria. Esta última ecuación integral, en notación simplificada, equivale a la forma diferencial:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + G(X_t, t)dW_t$$

En el caso particular, donde G depende solo de t, la integral que compromete a dicha función se puede resolver por el método de integración por partes, así:

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\, dW_s = g(t)\, W_t - g(t_0)\, W_{t_0} - \int_{t_0}^{t} \frac{dg(s)}{ds} W_s ds$$

La última integral es una integral de Riemann ordinaria evaluada sobre la función muestral individual de W_t.

Aunque en la práctica, en muchos casos relevantes, la función G depende tanto de t como de x; por ello, el matemático Kiyoshi Itô, ha dado una definición de la integral $\int_{t_0}^{t} G\,(X_s, s)\, \xi_s\, ds$, que incluye el caso cuando G depende solo de t como un caso especial; tal como se explica a continuación.

2.1.- Integral estocástica en el sentido de Itô

En primer lugar, se muestra la definición de la integral estocástica en sentido de Itô para la función indicadora en el intervalo $[a, b]$, posteriormente, se aborda la integral en sentido de Itô de una función escalonada en $[t_0, T]$, y luego, basados en el concepto de función no anticipativa, se presenta la integral estocástica en sentido de Itô de una función cualesquiera a través de una aproximación de una función arbitraria con la ayuda de las funciones escalonadas.

Sea $\chi_{[a,b]}$ la función indicadora en el intervalo $[a, b]$. Para $0 \leq a < b \leq T$ se define su integral estocástica en el sentido de Itô como:

$$\int_{0}^{T} \chi_{[a,b]}(t)\, dW(t) = W(b) - W(a),$$

por tanto, si G es una función escalonada en $[t_0, T]$, es decir,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g(t_k) \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(t)\,, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

entonces su integral estocástica en el sentido de Itô es:

$$\int_{0}^{T} g(t)\, dW(t) = \int_{0}^{T} \left[\sum_{k=0}^{m-1} g(t_k) \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(t) \right] dW(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)].$$

Es importante notar que, el valor de g, en el sentido de Itô, se toma en el extremo inferior de cada partición del intervalo, si se tomará en el punto medio se estaría ante la integral estocástica de Stratonovich. También es claro que la función g podría ser aleatoria.

2.1.1.- Reglas básicas de diferenciación estocástica

En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal $(dt)^2$, es una cantidad despreciable y se escribe: $(dt)^2 = 0$, en otras palabras, si algo es pequeño su cuadrado es todavía más pequeño. De hecho, $(dt)^a = 0$, si $a > 1$. La regla central del cálculo estocástico, que hace la distinción con el cálculo de variables reales, es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal “normal” es significativa. Específicamente, se tiene que si W_t es un proceso de Wiener estándar, entonces $(dW_t)^2 = dt$. Asimismo, se tiene que, $(dt)(dW_t) = (dt)(dt)^{\frac{1}{2}} = (dt)^{\frac{3}{2}} = 0$.

Así, las reglas básicas de diferenciación estocástica se resumen en el siguiente cuadro:

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

2.1.2.- Algunas propiedades de la integral estocástica de Itô

Sean f y g funciones escalonadas en $[t_0, T]$. Entonces, la integral estocástica en el sentido de Itô verifica:

1. $\int_0^T (f(t) + g(t))\, dW(t) = \int_0^T f(t)\, dW(t) + \int_0^T g(t)\, dW(t)$

2. $\int_0^T cg(t)\, dW(t) = c\int_0^T g(t)\, dW(t),\ \forall c \in \mathbb{R}$

3. Si f y g satisfacen $\int_0^T (E[f^2(t)] + E[g^2(t)])\, dt < \infty$, entonces

    - $E\left[\int_0^T f(t)\, dW(t)\right] = 0$
    - $E\left[\int_0^T f(t)\, dW(t) \int_0^T g(t)\, dW(t)\right] = \int_0^T E[f(t)g(t)]\, (dW_t)^2$
      $= \int_0^T E[f(t)g(t)]\, dt$

Una función g que sea independiente de los incrementos $W(t+s)-W(t)$, $\forall s>0$, se llama una función no anticipativa (o predictiva) y depende estocásticamente de $W(u)$ para $u \leq t$, donde W es el proceso de Wiener, esto es, depende solo del pasado. También se puede ver que, para una función g escalonada no anticipativa, la integral $\int_{t_0}^{t} g(s)\,dW_s$ es, a su vez, una función no anticipativa. De igual manera, se asume que los saltos de la función escalonada aleatoria g ocurren en tiempos no aleatorios.

Si se denota por $H_2[0,T]$ a la clase de funciones no anticipativas g tales que verifiquen $\int_0^T E[g^2(t)]\,dt < \infty$, se puede demostrar que para cada función $g \in H_2[0,T]$ existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones escalonadas tales que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T |g(t)-f_n(t)|^2\,dt = 0, \qquad casi\ seguro$$

mientras que la sucesión $\left\{\int_0^T f_n(s)\,dW(s)\right\}$ converge casi seguro, de forma uniforme en $[0,T]$, a una función que se denominará $L(t)$, donde $L(t)$ es una variable aleatoria que no depende de la elección de la sucesión $\{f_n\}$. Además, puesto que $\int_0^T f_n(s)\,dW(s)$ es una función continua para cada n y la convergencia es uniforme, si se define $\int_0^T f_n(s)\,dW(s) = L(t),\ 0 \leq t \leq T$, entonces dicha integral es una función continua casi seguro en t.

Las siguientes expresiones suelen ser de utilidad:

1. $\int_a^b W(t)\,dW(t) = \frac{1}{2}(W^2(b)-W^2(a)) - \frac{1}{2}(b-a)$
2. Si g es una función determinística regular, entonces

$$\int_a^b g(t)\,dW(t) = W(b)g(b) - W(a)g(a) - \int_a^b W(g)g'(t)dt$$

3. Si g es una función determinística regular tal que $\int_0^t (g(s))^2\,ds < +\infty$, entonces
   - Media: $E\left[\int_0^t g(s)\,dW(s)\right] = 0$.
   - Varianza: $Var\left[\int_0^t g(s)\,dW(s)\right] = \int_0^t (g(s))^2\,ds$.
   - Covarianza: $Cov\left[\int_0^t g_1(u)\,dW(u), \int_0^t g_2(u)\,dW(u)\right] = \int_0^{t\wedge s} g_1(u)g_2(u)\,ds$, siendo $t \wedge s = mín(t,s)$.
   - Normalidad: $\int_0^t g(s)\,dW(s) \sim N\left[0; \int_0^t (g(s))^2\,ds\right]$.

2.2.- Diferencial estocástica, integral estocástica y fórmula de Itô

Sean a y b dos funciones pertenecientes a $H_2[0,T]$ y sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisface la expresión

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)\,dW(t),\ \forall t_1, t_2\ \in [0,T].$$

En este caso, se dice que el proceso $X(t)$ tiene la siguiente diferencial estocástica asociada:

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Suponga $t_0 = 0$ y que T es un número positivo arbitrario, entonces la forma diferencial de:

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}(W^2(t) - W^2(0)) - \frac{1}{2}(t-0) = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$$

es

$$d[W_t^2] = dt + 2W_t dW(t)$$

Si se construye la diferencial de W_t^2 formalmente, usando la serie de Taylor, entonces se obtiene:

$$d[W_t^2] = 2W_t dW(t) + (dW_t)^2$$

Que son totalmente equivalentes, dado que $(dW_t)^2 = dt$.

2.2.1.- Algunas propiedades relativas a las diferenciales estocásticas

1. *Regla del múltiplo constante*: si X_t es un proceso estocástico y c es una constante, entonces:

   $d[cX_t] = cdX_t$

2. *Regla de la suma y de la diferencia*: si X_t y Y_t son dos procesos estocásticos, entonces:

   $d[X_t \pm Y_t] = dX_t \pm dY_t$

3. *Regla del producto*: sean $dX_i(t) = a_i(t)dt + b_i(t)dW(t),\ i = 1,2,$ con $a_i\ y\ b_i$ funciones pertenecientes a $H_2[0,T]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
d[X_1(t)X_2(t)] &= X_1(t)\ dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + dX_1(t)dX_2(t)\\
&= X_1(t)[a_2(t)dt + b_2(t)dW(t)] + X_2(t)[a_1(t)dt + b_1(t)dW(t)]\\
&+ [a_1(t)dt + b_1(t)dW(t)][a_2(t)dt + b_2(t)dW(t)]\\
&= [X_1(t)a_2(t)dt + X_1(t)b_2(t)dW(t)]\\
&+ [X_2(t)a_1(t)dt + X_2(t)b_1(t)dW(t)]\\
&+ \Big[a_1(t)a_2(t)(dt)^2 + a_1(t)b_2(t)dW(t)dt + b_1(t)a_2(t)dtdW(t)\\
&+ b_1(t)b_2(t)\big(dW(t)\big)^2\Big]\\
&= [X_1(t)a_2(t)dt + X_1(t)b_2(t)dW(t)]\\
&+ [X_2(t)a_1(t)dt + X_2(t)b_1(t)dW(t)] + [b_1(t)b_2(t)dt]\\
&= [X_1(t)a_2(t) + X_2(t)a_1(t) + b_1(t)b_2(t)]dt\\
&+ [X_1(t)b_2(t) + X_2(t)b_1(t)]dW(t)
\end{aligned}$$

En su forma integral, esto es:

$$X_1(t)X_2(t) = X_1(t_0)X_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_1(s)dX_2(s) + \int_{t_0}^{t} X_2(s)dX_1(s) + \int_{t_0}^{t} b_1(s)b_2(s)ds$$

con $t_0 \le t \le T$.

En comparación con las fórmulas correspondientes a la integral o diferencial ordinaria, existe un término extra, este es: $b_1(t)b_2(t)dt = b_1(t)b_2(t)(dW_t)^2$.

4. *Regla del cociente*: si X_t y Y_t son dos procesos estocásticos, entonces:

$$d\left[\frac{X_t}{Y_t}\right] = \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t - dX_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{X_t}{Y_t^3}(dY_t)^2$$

5. *Regla de la cadena*: Sea la función $\Phi(x,t) = \Phi(W_t,t) = \phi(W_t)g(t)$, con ϕ y g diferenciables, donde g' y ϕ'' son funciones continuas. Se tiene que,

$$\begin{aligned}
d\Phi(W(t),t) &= \phi(W_t)g'(t)dt + g(t)d\phi(W_t) + d\phi(W_t)g'(t)dt\\
&= \phi(W_t)g'(t)dt + g(t)\left(\phi'(W_t)dW(t) + \frac{1}{2}\phi''(W_t)\ dt\right)\\
&\quad + \left(\phi'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}\phi''(W_t)\ dt\right)g'(t)dt\\
&= \phi(W_t)g'(t)dt + g(t)\phi'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}g(t)\phi''(W_t)\ dt\\
&= \left(\phi(W_t)g'(t) + \frac{1}{2}g(t)\phi''(W_t)\right)dt + g(t)\phi'(W_t)dW_t
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(W_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial W_t^2}(W_t, t) \right) dt + \frac{\partial \Phi}{\partial W_t}(W_t, t) dW_t$$

Puesto que cualquier función regular de la forma $\Phi(x, t)$ puede aproximarse sobre compactos de $\mathbb{R}^2$ por funciones del tipo $\Phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)\phi_k(x)$, se concluye que la regla anterior es válida para toda función regular $\Phi(x, t)$. Finalmente, se reemplaza x por un proceso estocástico diferenciable cualquiera, dando origen a la conocida fórmula de Itô.

Teniendo claro que, usualmente una integral de Riemann no se calcula a partir de su definición, sino que existen fórmulas bien conocidas que agilizan y simplifican los cálculos; igualmente se presenta la misma situación para integrales estocásticas.

2.2.2.- Fórmula de Itô

Sea X_t un proceso con diferencial estocástica: $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$ con a y b dos funciones pertenecientes a $H_2[0, T]$ y sea $f(X_t, t)$ una función continua con derivadas parciales continuas. Entonces,

$$\begin{aligned} df(X_t, t) = {} & \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2}(dX_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t\, \partial t} dX_t dt + \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial t^2}(dt)^2 \right) \end{aligned}$$

Ahora aplicando las reglas básicas de diferenciación estocástica y sustituyendo dX_t, se tiene:

$$\begin{aligned} df(X_t, t) = {} & \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t}(a(t)dt + b(t)dW_t) + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2}(a(t)dt + b(t)dW_t)^2 \right. \\ & \left. + 2\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t\, \partial t}\big(a(t)dt + b(t)dW(t)\big)dt \right) \\ = {} & \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t}(a(t)dt + b(t)dW_t) + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2}((a(t)dt)^2 + 2a(t)b(t)dtdW_t + (b(t)dW_t)^2) \right. \\ & \left. + 2\frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t\, \partial t}(a(t)(dt)^2 + b(t)dtdW_t) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t} a(t)dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t} b(t)dW_t + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial X_t^2} b^2(t)dt\right) \\
&= \left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t} a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial X_t^2} b^2(t)\right)dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t} b(t)dW_t
\end{aligned}
$$

En el caso que $X_t = W_t$, la función suavizada del proceso de Wiener en sí mismo; para una función continua escalonada definida en $[t_0, T]$ con $0 \leq t < \infty$, se tiene que, $dX_t = dW_t$, donde $a(t) = 0,\ b(t) = 1$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
df(W_t,t) &= \left(\frac{\partial f(W_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(W_t,t)}{\partial W_t} a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(W_t,t)}{\partial W_t^2} b^2(t)\right)dt + \frac{\partial f(W_t,t)}{\partial W_t} b(t)dW_t \\
&= \left(\frac{\partial f(W_t,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(W_t,t)}{\partial W_t^2}\right)dt + \frac{\partial f(W_t,t)}{\partial W_t} dW_t
\end{aligned}
$$

En el caso especial en el cual $f = f(W_t)$, es decir, es independiente de t y dos veces diferenciable continuamente con respecto a W_t, se obtiene:

$$df(W_t) = \frac{1}{2} f''(W_t)dt + f'(W_t)dW_t$$

Lo que equivale, en la forma integral a:

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

A partir del resultado $df(W_t) = \frac{1}{2} f''(W_t)dt + f'(W_t)dW_t$, se tienen los siguientes casos particulares:

1. Si $f(x) = x^n$, con $n = 1,2,\ldots,\ t \geq 0,\ f'(x) = nx^{n-1}$ y $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, entonces se deduce que:

$$d(W_t^n) = nW_t^{n-1}dW_t + \frac{n(n-1)}{2} W_t^{n-2}dt$$

Por ejemplo:

$$d[W_t^2] = 2W_t dW_t + dt$$

$$d[W_t^3] = 3W_t^2 dW_t + 3W_t dt$$

2. Si $f(x) = e^{kx}$, con k constante, $t \geq 0$, $f'(x) = ke^{kx}$ y $f''(x) = k^2 e^{kx}$, por lo tanto:

$$d(e^{kW_t}) = ke^{kW_t} dW_t + \frac{1}{2} k^2 e^{kW_t} dt$$

Por ejemplo, para $k = 1$:

$$d(e^{W_t}) = e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt$$

3. Si $f(x) = sen\, x$, se tiene que, $f'(x) = cos\, x$ y $f''(x) = -sen\, x$; entonces:

$$d(sen\, W_t) = cosW_t dW_t - \frac{1}{2} sen\, W_t dt$$

En general, se puede obtener que la diferencial de un polinomio de $W_t\ es$:

$$dP(W_t) = P'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} P''(W_t) dt$$

Además, como cualquier función g que sea dos veces diferenciable con continuidad puede ser aproximada uniformemente por sus derivadas f' y f'' sobre un intervalo acotado, se tiene que la expresión anterior es válida para cualquier función P que sea dos veces derivable con continuidad.

También puede ocurrir que las funciones a y b dependan de $X(t)$; para este caso, existe una extensión de la fórmula de Itô que resulta esencial para reducir, mediante un cambio de variable, ecuaciones diferenciales estocásticas de este tipo.

2.2.3.- Extensión de la fórmula de Itô

Sea X_t un proceso con diferencial estocástica $dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$ con a y b funciones pertenecientes a $H_2[0, T]$ y sea $f(X_t, t)$ una función continua con derivadas parciales continuas. Entonces,

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} b^2(X_t, t) \right) dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_t$$

La anterior ecuación es el lema de Itô en su forma diferencial; la ecuación que representa su forma integral es:

$$f(X_t,t) = c + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f(X_s,s)}{\partial s} + \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial X_s} a(X(s),s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_s,s)}{\partial X_t^2} b^2(X_s,s) \right) ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial X_t} b(X_s,s)\, dW_s$$

O también

$$\begin{aligned} f(X_t,t) &= c + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial s} ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial X_s} a(X_s,s) ds + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_s,s)}{\partial X_t^2} b^2(X_s,s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial X_s} b(X_s,s)\, dW_s \\ &= c + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial s} ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial X_s} [a(X_s,s)ds + b(X_s,s)dW_s] \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_s,s)}{\partial X_t^2} b^2(X_s,s) ds \\ &= c + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial s} ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f(X_s,s)}{\partial X_s} dX_s + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_s,s)}{\partial X_t^2} b^2(X_s,s) ds \end{aligned}$$

2.2.4.- Ejemplos de la aplicación de las propiedades y de la fórmula de Itô

Ejemplo 1: Con $X_1(t) = t$ y $X_2(t) = W_t$, se tiene: $dX_1(t) = dt$ y $dX_2(t) = dW(t)$; donde $a_1(t) = 1,\ b_1(t) = 0,\ a_2(t) = 0\ y\ b_2(t) = 1$.

Entonces, aplicando la regla del producto, se llega a:

$$\begin{aligned} d[X_1(t)X_2(t)] &= X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt \\ d[tW_t] &= tdW(t) + W_t dt \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Con $X_1(t) = X_2(t) = W_t$, se tiene que, $dX_1(t) = dX_2(t) = dW(t)$; donde $a_1(t) = 0,\ b_1(t) = 1,\ a_2(t) = 0\ y\ b_2(t) = 1$.

Entonces, aplicando la regla del producto, se llega a un resultado bastante familiar:

$$\begin{aligned} d[X_1(t)X_2(t)] &= X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt \\ d[W_tW_t] &= W_t dW(t) + W_t dW(t) + dt \\ d[W_t^2] &= 2W_t dW(t) + dt \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Encontrar $d[W_t e^{W_t}]$

Luego $X_1(t) = W_t$ y $X_2(t) = e^{W_t}$; y se tiene que,

$$dX_1(t) = dW(t) \ \ y \ \ dX_2(t) = e^{W_t} dW(t) + \frac{1}{2} e^{W_t} dt$$

donde $a_1(t) = 0,\ b_1(t) = 1,\ a_2(t) = \frac{1}{2} e^{W_t}\ \ y\ \ b_2(t) = e^{W_t}$.

Entonces, aplicando la regla del producto, se llega a:

$$\begin{aligned}
d[X_1(t)X_2(t)] &= X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt \\
d[W_t e^{W_t}] &= W_t \left(e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt \right) + e^{W_t} dW_t + e^{W_t} dt \\
&= W_t e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} W_t e^{W_t} dt + e^{W_t} dW_t + e^{W_t} dt \\
&= e^{W_t} \left(1 + \frac{1}{2} W_t \right) dt + e^{W_t} (1 + W_t) dW_t
\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Encontrar $d[3W_t^2 + 2e^{5W_t}]$

Luego $X_1(t) = 3W_t^2$ y $X_2(t) = 2e^{5W_t}$; y con regla del múltiplo constante:

$$dX_1(t) = 3d[W_t^2] = 3(2W_t dW_t + dt) = 6W_t dW_t + 3dt$$

$$dX_2(t) = 2d[e^{5W_t}] = 2\left(5e^{5W_t} dW_t + \frac{1}{2}(5)^2 e^{5W_t} dt \right) = 10e^{5W_t} dW_t + 25e^{5W_t} dt$$

Entonces, aplicando la regla de la suma:

$$d[X_1(t) + X_2(t)] = dX_1(t) + dX_2(t)$$

$$d[3W_t^2 + 2e^{5W_t}] = 6W_t dW_t + 3dt + 10e^{5W_t} dW_t + 25e^{5W_t} dt$$

$$d[3W_t^2 + 2e^{5W_t}] = (6W_t + 10e^{5W_t}) dW_t + (3 + 25e^{5W_t}) dt$$

Ejemplo 5: Encontrar $d[e^{t+W_t}]$

Como

$$d[e^{t+W_t}] = d[e^t e^{W_t}]$$

Luego,

$$d[e^t] = e^t dt \quad \text{y}$$

$$d[e^{W_t}] = e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t}\, dt$$

donde, $X_1(t) = e^t,\ X_2(t) = e^{W_t},\ a_1(t) = e^t,\ b_1(t) = 0,\ a_2(t) = \frac{1}{2} e^{W_t}\ \ y\ \ b_2(t) = e^{W_t}$.

Entonces, a partir de la regla del producto:

$$\begin{aligned} d[X_1(t)X_2(t)] &= X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt \\ &= e^t\left(e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t}\,dt\right) + e^{W_t}e^t dt \\ &= e^{t+W_t}dW_t + \frac{1}{2}e^{t+W_t}dt + e^{t+W_t}dt \\ &= e^{t+W_t}dW_t + \frac{3}{2}e^{t+W_t}dt \end{aligned}$$

A partir de la regla de la cadena:

Sea $\Phi(W(t),t) = e^{t+W_t} = e^{W_t}e^t$ con $\phi\big(W(t)\big) = e^{W_t}$ y $g(t) = e^t$

$$\begin{aligned} d\Phi(W(t),t) &= d\left(\phi\big(W(t)\big)g(t)\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(W(t),t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial W_t^2}(W(t),t)\right)dt + \frac{\partial \Phi}{\partial W_t}(W(t),t)dW(t) \\ &= \left(e^{W_t}e^t + \frac{1}{2}e^t e^{W_t}\right)dt + e^t e^{W_t}dW_t \\ &= \frac{3}{2}e^{t+W_t}dt + e^{t+W_t}dW_t \end{aligned}$$

Ejemplo 6: Sea $X_t = X_0 e^{\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right]}$. Encontrar $d[X_t]$

Como $d\left[X_0 e^{\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right]}\right] = d\left[X_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}e^{\sigma W_t}\right]$

Entonces, $d\left[X_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}\right] = X_0\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}dt$ y

$$d[e^{\sigma W_t}] = \sigma e^{\sigma W_t}dW_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma W_t}\,dt$$

Entonces, a partir de la regla de la cadena:

Sea $\Phi(W(t),t) = X_0 e^{\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right]} = X_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}e^{\sigma W_t}$ con $\phi\big(W(t)\big) = e^{\sigma W_t}$ y $g(t) = X_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}$

$$\begin{aligned} d\Phi(W(t),t) &= d\left(\phi\big(W(t)\big)g(t)\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(W(t),t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial W_t^2}(W(t),t)\right)dt + \frac{\partial \Phi}{\partial W_t}(W(t),t)dW(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\sigma W_t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2} X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\sigma W_t} \sigma^2 \right) dt \\
&\quad + X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\sigma W_t} \sigma dW(t) \\
&= \left(X_t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2} X_t \sigma^2 \right) dt + X_t \sigma dW(t) \\
&= \left(X_t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2} X_t \sigma^2 \right) dt + X_t \sigma dW(t) \\
&= \mu X_t dt + \sigma X_t dW(t)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7: Considere el movimiento geométrico browniano $\{X_t : t \geq 0\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica: $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, con $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $X_0 > 0$, y que puede ser escrito como: $X_t = X_0 exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right]$, $t \geq 0$, y sea $f(X_t, t) = \ln X_t$ una función continua con derivadas parciales continuas. Muestre que las reglas del cálculo diferencial de variables reales no se preservan en el cálculo estocástico, debido esencialmente a que $(dW_t)^2 = dt$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
df(X_t, t) = &\left(\frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} b^2(X_t, t) \right) dt \\
&+ \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} b(X_t, t) dW_t
\end{aligned}
$$

donde

$$
\frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} = \frac{1}{X_t}, \qquad \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} = -\frac{1}{X_t^2}
$$

Luego se tiene:

$$
d \ln X_t = \left(\frac{1}{X_t} \mu X_t + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{X_t^2} \right] \sigma^2 X_t^2 \right) dt + \frac{1}{X_t} \sigma X_t dW_t
$$

$$
d \ln X_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t
$$

Análisis:

$$
d \ln X_t = \mu dt - \frac{1}{2} \sigma^2 dt + \sigma dW_t
$$

$$d\ln X_t = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$d\ln X_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Observe que, si x es una variable real,

$$d\ln x = \frac{dx}{x}$$

Sin embargo, si X_t sigue un movimiento geométrico browniano, esta regla no se cumple, ya que se tiene un término adicional, este es: $-\frac{1}{2}\sigma^2 dt$ el cual equivale a $-\frac{1}{2}\sigma^2 (dW_t)^2$.

La correspondiente integral estocástica asociada a

$$d\ln X_t = \mu dt - \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dW_t$$

es

$$\begin{aligned}\ln X_t &= \ln X_0 + \mu \int_0^t ds - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t (dW_s)^2 + \sigma \int_0^t dW_s \\ &= \ln X_0 + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t \\ &= \ln X_0 + \left[\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right] t + \sigma W_t\end{aligned}$$

2.3.- Ecuaciones diferenciales estocásticas

2.3.1.- Planteamiento general

Sea X_t un proceso estocástico continuo. Si pequeños cambios en el proceso X_t pueden ser escritos como una combinación lineal de pequeños cambios en t y pequeños incrementos de W_t, entonces esto se puede representar como:

$$dX_t = a(t, W_t, X_t)dt + b(t, W_t, X_t)dW_t$$

Y corresponde a una ecuación diferencial estocástica. En efecto, esta relación diferencial tiene la siguiente forma integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, W_s, X_s)ds + \int_0^t b(s, W_s, X_s)dW_s$$

Las funciones $a(t, W_t, X_t)$ y $b(t, W_t, X_t)$ son llamadas tendencia y volatilidad, respectivamente. Un proceso X_t es llamado una solución de la ecuación estocástica si este satisface dicha ecuación.

Ejemplo: Dados $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que $X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$, con $0 \leq t < 1$ es una solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1-t}\, dt + dW_t, \quad 0 \leq t < 1, \quad X_0 = a.$$

Demostración: se construye el término $\frac{b-X_t}{1-t}$,

$$b - X_t = b - a(1-t) - bt - (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

$$b - X_t = b(1-t) - a(1-t) - (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

$$b - X_t = (1-t)(b-a) - (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

$$\frac{b - X_t}{1-t} = (b-a) - \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

También se sabe que, $d\left(\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right) = \frac{1}{1-t} dW_t$

Entonces, partiendo de:

$$X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

Se calcula la derivada, y se simplifica la expresión:

$$dX_t = ad(1-t) + bdt + (1-t)d\left(\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right) + d(1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

$$dX_t = -adt + bdt + dW_t - dt\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

$$dX_t = (b-a)dt + dW_t - dt\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

$$dX_t = \left((b-a) - \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s\right)dt + dW_t$$

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t} dt + dW_t$$

De esta manera, se verifica que el proceso X_t es una solución de la ecuación estocástica dada. La pregunta de cómo esta solución fue obtenida en primer lugar, será respondida con el desarrollo de las siguientes sesiones.

2.3.2.- Cálculo de la media y la varianza a partir de la ecuación

La media y la varianza de un proceso puede ser encontrado directamente a partir de la ecuación estocástica, en algunos casos particulares, sin resolver explícitamente la ecuación.

Al tomar expectativas en

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, W_s, X_s) ds + \int_0^t b(s, W_s, X_s) dW_s$$

Y usando la propiedad de la integral de Itô $E\left[\int_a^b f(t, W_t, X_t) dW_t\right] = 0$, se produce:

$$E[X_t] = X_0 + \int_0^t E[a(s, W_s, X_s)] ds$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} E[X_t] = E[a(t, W_t, X_t)]$$

Se nota que, X_t no es diferenciable, pero sus expectativas $E[X_t]$ si lo son. Esta última ecuación puede ser resuelta exactamente en unos pocos casos particulares.

1. Sí $a(t, W_t, X_t) = a(t)$, entonces $\frac{d}{dt} E[X_t] = a(t)$ con la solución exacta $E[X_t] = X_0 + \int_0^t a(s) ds$.
2. Sí $a(t, W_t, X_t) = \alpha(t) X_t + \beta(t)$, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ funciones determinísticas continuas, entonces $\frac{d}{dt} E[X_t] = \alpha(t) E[X_t] + \beta(t)$, la cual es una ecuación diferencial lineal en $E[X_t]$. Su solución está dada por
$$E[X_t] = e^{A(t)} \left(X_0 + \int_0^t e^{-A(s)} \beta(s) ds \right),$$

   donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds$. Es importante notar que la expectativa $E[X_t]$ no depende de la volatilidad $b(t, W_t, X_t)$.

Ejemplo 1: Sí $dX_t = (2X_t + e^{2t})dt + b(t, W_t, X_t)dW_t$, entonces $E[X_t] = e^{2t}(X_0 + t)$.

Integrando la ecuación diferencial estocástica se obtiene:

$$X_t = X_0 + \int_0^t (2X_s + e^{2s})ds + \int_0^t b(s, W_s, X_s)dW_s$$

Al tomar expectativas y usar la propiedad de integral Itô $E\left[\int_a^b f(t, W_t, X_t)dW_t\right] = 0$, se produce:

$$E[X_t] = X_0 + \int_0^t (2E[X_s] + e^{2s})ds$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}E[X_t] = 2E[X_t] + e^{2t}$$

$$dE[X_t] = 2E[X_t]dt + e^{2t}dt$$

$$dE[X_t] - 2E[X_t]dt = e^{2t}dt$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-A(t)}$ donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds = 2\int_0^t E[X_s]\, ds$

$$e^{-2t}dE[X_t] - 2e^{-2t}E[X_t]dt = e^{-2t}e^{2t}dt$$

$$d(e^{-2t}E[X_t]) = dt$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene $E[X_t]$:

$$e^{-2t}E[X_t] = X_0 + t$$

$$E[X_t] = e^{2t}(X_0 + t).$$

Sea X_t un proceso que satisface la ecuación estocástica:

$$dX_t = \alpha(t)X_t dt + b(t)dW_t$$

Entonces la media y varianza de X_t están dadas por

$$E[X_t] = e^{A(t)}X_0$$

$$Var[X_t] = e^{2A(t)} \int_0^t e^{-2A(s)}\, b^2(s)ds,$$

donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds$.

La expresión $E[X_t] = e^{A(t)}X_0$ se deriva inmediatamente dado que $\beta(t) = 0$.

Para la varianza, primero se calcula $(dX_t)^2$:

$$dX_t = \alpha(t)X_t dt + b(t)dW_t$$
$$(dX_t)^2 = (\alpha(t)X_t dt + b(t)dW_t)^2$$
$$(dX_t)^2 = \alpha^2(t)X_t^2(dt)^2 + 2\alpha(t)X_t b(t)dtdW_t + b^2(t)(dW_t)^2$$
$$(dX_t)^2 = b^2(t)dt$$

También se tiene que,

$$d(X_t^2) = d(X_t X_t)$$
$$d(X_t^2) = X_t dX_t + X_t dX_t + dX_t dX_t$$
$$d(X_t^2) = 2X_t dX_t + (dX_t)^2$$
$$d(X_t^2) = 2X_t(\alpha(t)X_t dt + b(t)dW_t) + b^2(t)dt$$
$$d(X_t^2) = \left(2\alpha(t)X_t^2 + b^2(t)\right)dt + 2b(t)X_t dW_t$$

Ahora la nueva variable es X_t^2. De esta última ecuación diferencial estocástica se deduce que $\alpha(t)$ es reemplazado por $2\alpha(t)$ y $\beta(t)$ por $b^2(t)$. También se asume que, $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\,ds$.

Entonces $E[X_t^2]$ equivale a:

$$E[X_t^2] = e^{2A(t)}\left(X_0^2 + \int_0^t e^{-2A(s)}b^2(s)ds\right)$$

De aquí, se deduce que la varianza es:

$$Var[X_t] = E[X_t^2] - (E[X_t])^2$$
$$Var[X_t] = e^{2A(t)}\left(X_0^2 + \int_0^t e^{-2A(s)}b^2(s)ds\right) - \left(e^{A(t)}X_0\right)^2$$
$$Var[X_t] = e^{2A(t)}\left(X_0^2 + \int_0^t e^{-2A(s)}b^2(s)ds\right) - e^{2A(t)}X_0^2$$
$$Var[X_t] = e^{2A(t)}\int_0^t e^{-2A(s)}\,b^2(s)ds$$

La media y la varianza para un proceso estocástico dado se pueden calcular trabajando la ecuación diferencial estocástica asociada. A continuación, algunos ejemplos.

Ejemplo 2: Encontrar la media y la varianza de e^{kW_t}, con k constante.

Como ya se vio anteriormente, a partir de la fórmula de Itô:

$$d(e^{kW_t}) = ke^{kW_t}dW_t + \frac{1}{2}k^2e^{kW_t}dt,$$

Integrando se produce:

$$e^{kW_t} = e^{kW_0} + k\int_0^t e^{kW_s}\, dW_s + \frac{1}{2}k^2 \int_0^t e^{kW_s}\, ds$$

$$e^{kW_t} = e^{kW_0} + k\int_0^t e^{kW_s}\, dW_s + \frac{1}{2}k^2 \int_0^t e^{kW_s}\, ds$$

Al tomar expectativas y teniendo en cuenta que según la propiedad de la integral de Itô $E\left[\int_a^b f(t, W_t, X_t) dW_t\right] = 0$, se obtiene:

$$E[e^{kW_t}] = E[e^{kW_0}] + kE\left[\int_0^t e^{kW_s}\, dW_s\right] + \frac{1}{2}k^2 E\left[\int_0^t e^{kW_s}\, ds\right]$$

$$E[e^{kW_t}] = 1 + \frac{1}{2}k^2 \int_0^t E[e^{kW_s}]\, ds$$

Diferenciando, se tiene:

$$d(E[e^{kW_t}]) = \frac{1}{2}k^2 E[e^{kW_t}]dt$$

$$d(E[e^{kW_t}]) - \frac{1}{2}k^2 E[e^{kW_t}]dt = 0$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-A(t)} = e^{-\frac{1}{2}k^2 t}$.

$$e^{-\frac{1}{2}k^2 t} d(E[e^{kW_t}]) - \frac{1}{2}k^2 e^{-\frac{1}{2}k^2 t} E[e^{kW_t}]dt = 0$$

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}k^2 t} E[e^{kW_t}]\right) = 0$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene $E[X_t]$:

$$e^{-\frac{1}{2}k^2 t} E[e^{kW_t}] = e^{kW_0}$$

teniendo en cuenta que $e^{kW_0} = 1$

$$E[e^{kW_t}] = e^{\frac{1}{2}k^2 t}$$

La varianza es:

$$Var[e^{kW_t}] = E[e^{2kW_t}] - (E[e^{kW_t}])^2$$

Reemplazando a k por $2k$ en $E[e^{kW_t}] = e^{\frac{1}{2}k^2 t}$ se llega a $E[e^{2kW_t}] = e^{\frac{1}{2}(2k)^2 t} = e^{\frac{1}{2}(4k^2)t}$

$$Var[e^{kW_t}] = e^{\frac{1}{2}(4k^2)t} - \left(e^{\frac{1}{2}k^2 t}\right)^2$$

$$Var[e^{kW_t}] = e^{2k^2t} - e^{k^2t}$$

$$Var[e^{kW_t}] = e^{k^2t}\left[e^{k^2t} - 1\right]$$

Ejemplo 3: Encontrar la media del proceso $X_t = W_t e^{W_t}$ el cual cuenta con diferencial estocástica $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$.

Como ya se vio anteriormente, a partir de la regla del producto y la fórmula de Itô:

Sea $X_1(t) = W_t$ y $X_2(t) = e^{W_t}$; se tiene que,

$$dX_1(t) = dW(t) \;\; y \;\; dX_2(t) = e^{W_t}dW(t) + \frac{1}{2}e^{W_t}dt$$

donde $a_1(t) = 0,\; b_1(t) = 1,\; a_2(t) = \frac{1}{2}e^{W_t} \;\; y \;\; b_2(t) = e^{W_t}$.

Entonces, se llega a:

$$d[X_1(t)X_2(t)] = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt$$
$$d[W_t e^{W_t}] = W_t\left(e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t}dt\right) + e^{W_t}dW_t + e^{W_t}dt$$
$$d[W_t e^{W_t}] = W_t e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}W_t e^{W_t}dt + e^{W_t}dW_t + e^{W_t}dt$$
$$d[W_t e^{W_t}] = \left(e^{W_t} + \frac{1}{2}W_t e^{W_t}\right)dt + (e^{W_t} + W_t e^{W_t})dW_t$$

Integrando y usando $W_0 e^{W_0} = 0$ se produce:

$$W_t e^{W_t} = W_0 e^{W_0} + \int_0^t \left(e^{W_s} + \frac{1}{2}W_s e^{W_s}\right)dt + \int_0^t (e^{W_s} + W_s e^{W_s})dW_s$$
$$W_t e^{W_t} = \int_0^t \left(e^{W_s} + \frac{1}{2}W_s e^{W_s}\right)dt + \int_0^t (e^{W_s} + W_s e^{W_s})dW_s$$

Al tomar expectativas y teniendo en cuenta que según la propiedad de la integral de Itô $E\left[\int_a^b f(t, W_t, X_t)dW_t\right] = 0$, se obtiene:

$$E[W_t e^{W_t}] = \int_0^t \left(E[e^{W_s}] + \frac{1}{2}E[W_s e^{W_s}]\right)ds.$$

Diferenciando, se tiene:

$$d(E[W_t e^{W_t}]) = \left(E[e^{W_t}] + \frac{1}{2}E[W_t e^{W_t}]\right)dt$$

$$d(E[W_t e^{W_t}]) - \frac{1}{2}E[W_t e^{W_t}]dt = E[e^{W_t}]dt$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-A(t)} = e^{-\frac{1}{2}t}$.

$$e^{-\frac{1}{2}t}d(E[W_t e^{W_t}]) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t e^{W_t}]dt = e^{-\frac{1}{2}t}E[e^{W_t}]dt$$

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t e^{W_t}]\right) = e^{-\frac{1}{2}t}E[e^{W_t}]dt$$

Tomando en cuenta que previamente se encontró que $E[e^{kW_t}] = e^{\frac{1}{2}k^2 t}$, entonces para $k = 1$, se tiene $E[e^{W_t}] = e^{\frac{1}{2}t}$, reemplazando:

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t e^{W_t}]\right) = e^{-\frac{1}{2}t}e^{\frac{1}{2}t}dt$$

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t e^{W_t}]\right) = dt$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene $E[W_t e^{W_t}]$:

$$e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t e^{W_t}] = W_0 e^{W_0} + t$$

teniendo en cuenta que $W_0 e^{W_0} = 0$

$$e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t e^{W_t}] = t$$

$$E[W_t e^{W_t}] = te^{\frac{1}{2}t}$$

Ejemplo 4: Encontrar la media del proceso $X_t = W_t^2 e^{W_t}$ el cual cuenta con diferencial estocástica $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$.

A partir de la regla del producto y la fórmula de Itô:

Sea $X_1(t) = W_t^2$ y $X_2(t) = e^{W_t}$; se tiene que,

$$dX_1(t) = 2W_t dW_t + dt \;\; y \;\; dX_2(t) = e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t}dt$$

donde $a_1(t) = 1,\; b_1(t) = 2W_t,\; a_2(t) = \frac{1}{2}e^{W_t}\;\; y \;\; b_2(t) = e^{W_t}$.

Entonces, se llega a:

$$d[X_1(t)X_2(t)] = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt$$
$$d[W_t^2 e^{W_t}] = W_t^2\left(e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t}dt\right) + e^{W_t}(2W_t dW_t + dt) + 2W_t e^{W_t}dt$$

$$d[W_t^2 e^{W_t}] = W_t^2 e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}W_t^2 e^{W_t}dt + 2W_t e^{W_t}dW_t + e^{W_t}dt + 2W_t e^{W_t}dt$$

$$d[W_t^2 e^{W_t}] = \frac{1}{2}W_t^2 e^{W_t}dt + e^{W_t}dt + 2W_t e^{W_t}dt + W_t^2 e^{W_t}dW_t + 2W_t e^{W_t}dW_t$$

$$d[W_t^2 e^{W_t}] = e^{W_t}\left(\frac{1}{2}W_t^2 + 1 + 2W_t\right)dt + e^{W_t}(W_t^2 + 2W_t)dW_t$$

Integrando y tomando expectativas, teniendo en cuenta que según la propiedad de la integral de Itô $E\left[\int_a^b f(t, W_t, X_t)dW_t\right] = 0,$ se obtiene:

$$E[W_t^2 e^{W_t}] = \int_0^t \left(\frac{1}{2}E[W_s^2 e^{W_s}] + E[e^{W_s}] + 2E[W_s e^{W_s}]\right)ds$$

Ya que, $E[W_t e^{W_t}] = te^{\frac{1}{2}t}$ y $E[e^{W_t}] = e^{\frac{1}{2}t}$. Entonces, diferenciando se tiene:

$$d(E[W_t^2 e^{W_t}]) = \left(\frac{1}{2}E[W_t^2 e^{W_t}] + E[e^{W_t}] + 2E[W_t e^{W_t}]\right)dt$$

$$d(E[W_t^2 e^{W_t}]) - \frac{1}{2}E[W_t^2 e^{W_t}]dt = \left(e^{\frac{1}{2}t} + 2te^{\frac{1}{2}t}\right)dt$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-A(t)} = e^{-\frac{1}{2}t}$.

$$e^{-\frac{1}{2}t}d(E[W_t^2 e^{W_t}]) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t^2 e^{W_t}]dt = e^{-\frac{1}{2}t}\left(e^{\frac{1}{2}t} + 2te^{\frac{1}{2}t}\right)dt$$

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t^2 e^{W_t}]\right) = (1 + 2t)dt$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene $E[W_t^2 e^{W_t}]$:

$$e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t^2 e^{W_t}] = \int_0^t (1 + 2s)ds$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t^2 e^{W_t}] = t + t^2 + E[W_0^2 e^{W_0}]$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}E[W_t^2 e^{W_t}] = t + t^2$$

$$E[W_t^2 e^{W_t}] = t(1 + t)e^{\frac{1}{2}t}$$

2.3.3.- Existencia y unicidad de solución. La solución como proceso de Markov y de difusión

Es conocido que, en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, para asegurar la existencia y unicidad de la solución se suelen imponer condiciones de tipo

Lipschitz. Como una ecuación diferencial ordinaria es un caso particular del caso estocástico con $b = 0$, entonces es de esperar que para ecuaciones diferenciales estocásticas se dispongan de resultados similares. En ese sentido se tiene el siguiente resultado:

Considérese la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = a(X(t), t\,)dt + b(X(t), t)dW(t)$$
$$X(0) = x_0, \qquad t_0 \leq t \leq T\ < \infty$$

donde $W(t)$ representa el proceso de Wiener estándar y x_0 es una variable aleatoria independiente de $W(t) - W(t_0)$ para $t \geq t_0$. Se supone que las funciones a y b están definidas y son medibles en $[t_0, T]x\mathbb{R}$ y verifican las siguientes condiciones: Existe una constante $K > 0$ tal que

- (Condición de Lipschitz). $|a(x, t\,) - a(y, t\,)| + |b(x, t\,) - b(y, t\,)| \leq K|x - y|$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall x, y\ \in \mathbb{R}$.
- (Restricción sobre el crecimiento). $|a(x, t\,)|^2 + |b(x, t\,)|^2 \leq K(1 - |x|^2)$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Entonces, la ecuación diferencial estocástica en cuestión tiene una única solución en $[t_0, T]$ y con valores en $\mathbb{R}$, continua con probabilidad uno, que satisface la condición inicial; esto es, si $X(t)$ y $Y(t)$ son soluciones de *EDE* con igual valor inicial x_0, entonces

$$P\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0\right) = 0.$$

A continuación, se muestran algunos comentarios interesantes a la luz del resultado enunciado:

1. El teorema sigue siendo válido si reemplazamos la condición de Lipschitz por una más general, a saber, para cada N>0 existe una constante K_N tal que $\forall t \in [t_0, T]$, $|x| \leq N$ y $|x| \leq N$ se verifica $|a(x, t\,) - a(y, t\,)| + |b(x, t\,) - b(y, t\,)| \leq K|x - y|$
2. Para que la condición de Lipschitz del teorema (o la generalización de la nota anterior) se verifique es suficiente que las funciones a y b tengan derivadas de primer orden, respecto de x, continuas para cada valor $t \in [t_0, T]$ y que estén acotadas en $[t_0, T]x\mathbb{R}$ (o en $[t_0, T]x|x| \leq \mathbb{N}$ en el caso de la generalización).
3. En cuanto a la segunda condición del teorema (la del crecimiento), lo que hace es acotar las funciones a y b de forma uniforme respecto a $t \in [t_0, T]$ y permite, como mucho, un crecimiento lineal de dichas funciones respecto a x. Si esta condición no se verifica se produce el denominado fenómeno de explosión de la solución. Por lo tanto, esta condición asegura que, con probabilidad uno, la solución no explota en $[t_0, T]$, sea quien sea la condición inicial x_0.

4. Si las funciones a y b están definidas en $[t_0, \infty)x\mathbb{R}$, y las condiciones del teorema se verifican para cualquier subintervalo finito $[t_0, T]$ incluido en $[t_0, \infty)$, entonces la ecuación tiene una única solución en $[t_0, \infty)$, que se denomina solución global.

2.3.4.- Algunas propiedades de la solución

A continuación, se exponen algunas características de la solución de la ecuación diferencial estocástica $dX(t) = a(X(t), t\,)dt + b(X(t), t)dW(t)$.

Respecto a su carácter markoviano:

Si esta *EDE* satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución, entonces la solución es, para cualquier condición inicial, un proceso de Markov en $[t_0, T]$. Además, si los coeficientes a y b son independientes de t en $[t_0, T]$, la solución es un proceso de Markov homogéneo, o sea, con probabilidades de transición estacionarias.

Como caso particular, la solución, si existe, de una ecuación diferencial estocástica autónoma (los coeficientes no dependen de t) es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo para $t \geq t_0$.

Si además se desea que el proceso sea de difusión hay que exigir nuevas condiciones sobre los coeficientes de la ecuación diferencial. Así, se tiene:

Si esta *EDE* satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución y, además, las funciones a y b son continuas respecto a t, entonces la solución es un proceso de difusión con media infinitesimal $a(x, t\,)$ y varianza infinitesimal $b^2(x, t\,)$. En particular, la solución de una ecuación diferencial estocástica autónoma es siempre un proceso de difusión homogéneo sobre $[t_0, \infty]$.

2.3.5.- Ecuaciones diferenciales estocásticas exactas

La ecuación diferencial estocástica $dX_t = a(t, W_t\,)dt + b(t, W_t)dW_t$ es llamada exacta si existe una función diferenciable $f(t, x\,)$ tal que cumple con el siguiente sistema,

$$a(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}$$

$$b(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$$

Luego se asume que la ecuación es exacta. Entonces al hacer la correspondiente sustitución se produce:

$$dX_t = \left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dW_t$$

Ahora aplicando la fórmula de Itô, como ya se explicó cuando $X_t = W_t$, se tiene que, $dX_t = df(t, W_t)$; lo cual implica $X_t = f(t, W_t) + c$, con c constante.

Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales que involucran a $a(t,x)$ y a $b(t,x)$ se requieren los siguientes pasos:

1. Integrando parcialmente con respecto a x en la ecuación relacionada con $b(t,x)$, se obtiene $f(t,x)$ que incluye una función aditiva $T(t)$;
2. Se sustituye dentro de la ecuación relacionada con $a(t,x)$ y se determina la función $T(t)$;
3. La solución es $X_t = f(t, W_t) + c$, con c determinado a partir de la condición inicial sobre X_t.

Para tener en cuenta, si la ecuación diferencial estocástica $dX_t = a(t, W_t)dt + b(t, W_t)dW_t$ es exacta, entonces las funciones coeficiente $a(t,x)$ y $b(t,x)$ satisfacen la condición:

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}$$

Si esta condición no se satisface entonces la ecuación no es exacta.

Esta ecuación tiene el significado de una ecuación de calor. La función $b(t,x)$ representa la temperatura medida a través de x en el instante de tiempo t, mientras que $\partial_x a(t,x)$ es la densidad de fuentes de calor, la función $a(t,x)$ puede considerarse como el potencial del cual se deriva la densidad de las fuentes de calor tomando como gradiente a x.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = e^t(1 + W_t^2)dt + (1 + 2e^t W_t)dW_t \text{ con } X_0 = 0$$

En este caso $a(t,x) = e^t(1 + x^2)$ y $b(t,x) = 1 + 2e^t x$

Luego,

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = 2e^t x; \quad \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} = 2e^t x; \quad \frac{\partial b(t,x)}{\partial x} = 2e^t \quad y \quad \frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

Por tanto, se cumple la condición:

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}$$

concluyendo así, que esta ecuación diferencial estocástica es exacta.

El sistema de ecuaciones asociado es:

$$e^t(1 + x^2\,) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$$

$$1 + 2e^t x = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$$

Integrando parcialmente respecto a x la segunda ecuación del sistema se produce:

$$f(t,x) = \int (1 + 2e^t x)\, dx = x + e^t x^2 + \ T(t)$$

Entonces

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = e^t x^2 + \ T'(t) \ \ y \ \ \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = 2e^t$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema se produce:

$$e^t(1 + x^2\,) = e^t x^2 + \ T'(t) + e^t$$

Esto implica $T'(t) = 0$; lo que equivale a $T = c$; c una constante. Por tanto, $f(t,x) = x + e^t x^2 + c$, y la solución es $X_t = f(t, W_t\,) = W_t \ + e^t W_t^2 + c$. Dado que, $X_0 = 0$, entonces $X_0 = f(0, W_0\,) = W_0 \ + e^0 W_0^2 + c$; esto es, $c = 0$. En conclusión, la solución es $X_t = W_t \ + e^t W_t^2$.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \left(\tfrac{1}{2}t^2 sen\ tW_t - W_t\ cos\ tW_t\right)dt - t\ cos\ tW_t\ dW_t \ \text{ con } X_0 = 0$$

En este caso $a(t,x) = \frac{1}{2}t^2 sen\ tx - x\ cos\ tx$ y $b(t,x) = -t\ cos\ tx$

Luego,

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{2}t^3 cos\ tx + tx\ sen\ tx - \cos tx; \ \ \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} = tx\ sen\ tx - \cos tx;$$

$$\frac{\partial b(t,x)}{\partial x} = t^2 sen\ tx \ \ \ y \ \ \ \frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2} = t^3 cos\ tx$$

Por tanto, se cumple la condición:

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}$$

concluyendo así, que esta ecuación diferencial estocástica es exacta.

El sistema de ecuaciones asociado es:

$$\frac{1}{2}t^2 sen\ tx - x\ cos\ tx = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$$

$$-t\ cos\ tx = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$$

Integrando parcialmente respecto a x la segunda ecuación del sistema se produce:

$$f(t,x) = -t\int cos\ tx\, dx = -sen\ tx\ +\ T(t)$$

Entonces

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -x\ cos\ tx\ +\ T'(t)\ \ y\ \ \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = t^2 sen\ tx$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema se produce:

$$\frac{1}{2}t^2 sen\ tx - x\ cos\ tx = -x\ cos\ tx +\ T'(t) + \frac{1}{2}t^2 sen\ tx$$

Esto implica $T'(t) = 0$; lo que equivale a $T = c$; c una constante. Por tanto, $f(t,x) = -sen\ tx\ +\ c,$ y la solución es $X_t = f(t, W_t) = -sen\ tW_t\ +\ c$. Dado que, $X_0 = 0$, entonces $X_0 = f(0, W_0) = -sen\ 0W_0\ +\ c;$ esto es, $c = 0$. En conclusión, la solución es $X_t = -sen\ tW_t$.

Ejemplo 3: Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \tfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}W_t dt + e^{\frac{t}{2}}\, dW_t \text{ con } X_0 = 0$$

En este caso $a(t,x) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x$ y $b(t,x) = e^{\frac{t}{2}}$

Luego,

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}};\ \ \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}};\ \ \frac{\partial b(t,x)}{\partial x} = 0\ \ y\ \ \frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

Por tanto, se cumple la condición:

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}$$

concluyendo así, que esta ecuación diferencial estocástica es exacta.

El sistema de ecuaciones asociado es:

$$\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$$

$$e^{\frac{t}{2}} = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$$

Integrando parcialmente respecto a x la segunda ecuación del sistema se produce:

$$f(t,x) = e^{\frac{t}{2}}\int dx = xe^{\frac{t}{2}} + T(t)$$

Entonces

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x + T'(t) \;\; y \;\; \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema se produce:

$$\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x + T'(t)$$

Esto implica $T'(t) = 0;$ lo que equivale a $T = c$; c una constante. Por tanto, $f(t,x) = xe^{\frac{t}{2}} + c,$ y la solución es $X_t = f(t, W_t) = W_t\, e^{\frac{t}{2}} + c$. Dado que, $X_0 = 0,$ entonces $X_0 = f(0, W_0) = W_0\, e^{\frac{0}{2}} + c;$ esto es, $c = 0.$ En conclusión, la solución es $X_t = W_t\, e^{\frac{t}{2}}$.

Ejemplo 4: Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \left(2tW_t^3 + 3t^2(1 + W_t)\right)dt + (3t^2W_t^2 + 1)dW_t \text{ con } X_0 = 0$$

En este caso $a(t,x) = 2tx^3 + 3t^2(1 + x)$ y $b(t,x) = 3t^2x^2 + 1$

Luego,

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = 6tx^2 + 3t^2; \;\; \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} = 6tx^2;$$

$$\frac{\partial b(t,x)}{\partial x} = 6t^2x \quad y \quad \frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2} = 6t^2$$

Por tanto, se cumple la condición:

$$\frac{\partial a(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial b(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x^2}$$

concluyendo así, que esta ecuación diferencial estocástica es exacta.

El sistema de ecuaciones asociado es:

$$2tx^3 + 3t^2(1 + x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$$

$$3t^2x^2 + 1 = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$$

Integrando parcialmente respecto a x la segunda ecuación del sistema se produce:

$$f(t,x) = \int (3t^2x^2 + 1)\, dx = t^2x^3 + x + T(t)$$

Entonces

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = 2tx^3 + T'(t) \;\; y \;\; \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = 6t^2x$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema se produce:

$$2tx^3 + 3t^2(1+x) = 2tx^3 + T'(t) + \frac{1}{2}6t^2x$$

$$2tx^3 + 3t^2 + 3t^2x = 2tx^3 + T'(t) + 3t^2x$$

Esto implica $T'(t) = 3t^2$; lo que equivale a $T(t) = t^3 + c$; c una constante. Por tanto, $f(t,x) = t^2x^3 + x + t^3 + c = t^2(x^3 + t) + x + c$, y la solución es $X_t = f(t, W_t) = t^2(W_t^3 + t) + W_t + c$. Dado que, $X_0 = 0$, entonces $X_0 = f(0, W_0) = 0^2(W_0^3 + 0) + W_0 + c$; esto es, $c = 0$. En conclusión, la solución es $X_t = t^2(W_t^3 + t) + W_t$.

2.3.6.- Integración por inspección

Cuando se resuelven ecuaciones diferenciales estocásticas por inspección, lo que se busca es la oportunidad de aplicar las reglas del producto o del cociente según corresponda:

$$d(f(t)Y_t) = f(t)dY_t + Y_t df(t)$$

$$d\left(\frac{X_t}{f(t)}\right) = \frac{f(t)dX_t - X_t\, df(t)}{f(t)^2}$$

Por ejemplo, si una ecuación diferencial estocástica puede ser escrita como:

$$dX_t = f'(t)W_t\, dt + f(t)dW_t$$

la regla del producto trae la ecuación en la forma exacta:

$$dX_t = d(f(t)W_t)$$

la cual después de la integración lleva a la solución

$$X_t = X_0 + f(t)W_t$$

Ejemplo 1: solucionar la siguiente ecuación diferencial estocástica por el método de inspección. Con $X_0 = 0$

$$dX_t = (1 + W_t)dt + (t + 2W_t)dW_t$$
$$dX_t = (1 + W_t)dt + (t + 2W_t)dW_t$$
$$dX_t = dt + W_t dt + tdW_t + 2W_t dW_t$$
$$dX_t = (2W_t dW_t + dt) + W_t dt + tdW_t$$
$$dX_t = d(W_t^2) + d(tW_t)$$
$$dX_t = d(W_t^2 + tW_t)$$

Por lo tanto, $X_t = W_t^2 + tW_t$.

Ejemplo 2: solucionar por inspección, con $X_1 = 0$

$$t^2 dX_t = (2t^3 - W_t)dt + tdW_t$$

$$dX_t = \left(\frac{2t^3 - W_t}{t^2}\right)dt + \frac{1}{t}dW_t$$

$$dX_t = 2tdt - \frac{1}{t^2}W_t\,dt + \frac{1}{t}dW_t$$

$$dX_t = d(t^2) + d\left(\frac{1}{t}W_t\right)$$

$$dX_t = d\left(t^2 + \frac{1}{t}W_t\right)$$

con $X_1 = 0$, se tiene que, $X_t = X_0 + t^2 + \frac{1}{t}W_t$, luego $X_1 = X_0 + 1 + W_1$, de donde se obtiene $X_0 = -1 - W_1$.

Por lo tanto, $X_t = t^2 + \frac{1}{t}W_t - 1 - W_1$.

Ejemplo 3: solucionar por inspección, con $X_0 = 0$

$$dX_t = 2tW_t dW_t + W_t^2 dt$$

$$dX_t = 2tW_t dW_t + W_t^2 dt + tdt - tdt$$

$$dX_t = t(2W_t dW_t + dt) + W_t^2 dt - tdt$$

$$dX_t = td(W_t^2) + W_t^2 dt - \frac{1}{2}d(t^2)$$

$$dX_t = d(tW_t^2) - d\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$$dX_t = d\left(tW_t^2 - \frac{t^2}{2}\right)$$

Por lo tanto, $X_t = tW_t^2 - \frac{t^2}{2}$.

Ejemplo 4: solucionar por inspección, con $X_1 = 0$

$$dX_t = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} W_t\right) dt + \sqrt{t} dW_t$$

$$dX_t = dt + \frac{1}{2\sqrt{t}} W_t dt + \sqrt{t} dW_t$$

$$dX_t = dt + d\left(\sqrt{t} W_t\right)$$

$$dX_t = d\left(t + \sqrt{t} W_t\right)$$

con $X_1 = 0$, se tiene que, $X_t = X_0 + t + \sqrt{t} W_t$, luego $X_1 = X_0 + 1 + W_1$, de donde se obtiene $X_0 = -1 - W_1$.

Por lo tanto, $X_t = t + \sqrt{t} W_t - 1 - W_1$.

2.3.7.- Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Considere la ecuación diferencial estocástica con drift dentro del término lineal

$$dX_t = (\alpha(t) X_t + \beta(t))dt + b(t, W_t)dW_t, \quad t \geq 0$$

Esto también puede ser escrito como

$$dX_t - \alpha(t) X_t dt = \beta(t)\, dt + b(t, W_t)dW_t$$

Sea $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds$. Luego, multiplicando por el factor integrante $e^{-A(t)}$ se tiene que, el lado izquierdo de la ecuación anterior se transforma en una expresión exacta

$$e^{-A(t)}(dX_t - \alpha(t) X_t dt) = e^{-A(t)} \beta(t)\, dt + e^{-A(t)} b(t, W_t)dW_t$$

$$d\left(e^{-A(t)} X_t\right) = e^{-A(t)} \beta(t)\, dt + e^{-A(t)} b(t, W_t)dW_t$$

Integrando se produce

$$e^{-A(t)} X_t = X_0 + \int_0^t e^{-A(s)} \beta(s)\, ds + \int_0^t e^{-A(s)} b(s, W_s)\, dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \left(\underbrace{\int_0^t e^{-A(s)} \beta(s)\, ds}_{Integral\ de\ Riemann} + \underbrace{\int_0^t e^{-A(s)} b(s, W_s)\, dW_s}_{Integral\ Estocástica\ de\ Itô} \right)$$

Algunas veces, en aplicaciones prácticas estas integrales pueden ser calculadas explícitamente.

Cuando $b(t, W_t) = b(t)$, esta ultima integral se convierte en una integral Wiener. En este caso la solución X_t es Gaussiana con media y varianza dadas por

$$E[X_t] = X_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} \beta(s)\, ds$$

$$Var[X_t] = e^{2A(t)} \int_0^t e^{-2A(s)} b(s)^2\, ds$$

Otro caso particular importante es cuando $\alpha(t) = \alpha \neq 0, \beta(t) = \beta$ son constante y $b(t, W_t) = b(t)$. La ecuación en este caso es

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta)dt + b(t)dW_t, \ \ t \geq 0$$

Y la solución toma la forma

$$X_t = X_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} b(s)\, dW_s$$

Ejemplo 1: solucionar la ecuación diferencial estocástica lineal:

$$dX_t = (4X_t - 1)dt + 2dW_t,$$

Se escribe la ecuación como:

$$dX_t - 4X_t dt = -dt + 2dW_t$$

Se multiplica por el factor integrante $e^{-A(t)}$ donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds = 4\int_0^t ds = 4t$

$$(e^{-4t} dX_t - 4e^{-4t} X_t dt) = 2e^{-4t} dW_t - e^{-4t} dt$$

$$d(e^{-4t} X_t) = 2e^{-4t} dW_t - e^{-4t} dt$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene

$$e^{-4t} X_t = X_0 - \int_0^t e^{-4s}\, ds + 2\int_0^t e^{-4s}\, dW_s$$

Dividiendo entre e^{-4t} y luego realizando la integración, se produce

$$X_t = X_0 e^{4t} - e^{4t} \int_0^t e^{-4s}\, ds + 2e^{4t} \int_0^t e^{-4s}\, dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{4t} - e^{4t} \left[-\frac{1}{4} e^{-4s}\right]_0^t + 2\int_0^t e^{4t} e^{-4s}\, dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{4t} - e^{4t} \left[-\frac{1}{4} e^{-4t} + \frac{1}{4}\right] + 2\int_0^t e^{4(t-s)} dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{4t} + \frac{1}{4}(1 - e^{4t}) + 2e^{4(t-s)} W_t$$

Ejemplo 2: solucionar la ecuación diferencial estocástica lineal:

$$dX_t = (3X_t - 2\,)dt + e^{3t} dW_t,$$

Se tiene el caso particular cuando $\alpha(t) = \alpha \neq 0, \beta(t) = \beta$ son constante y $b(t, W_t\,) = b(t)$. La ecuación en este caso es

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta\,)dt + b(t\,)dW_t, \;\; t \geq 0$$

Y la solución toma la forma

$$X_t = X_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} b(s)\, dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{3t} + \frac{(-2)}{3}(e^{3t} - 1) + \int_0^t e^{3(t-s)} e^{3s}\, dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{3t} - \frac{2}{3}(e^{3t} - 1) + \int_0^t e^{3t}\, dW_s$$

$$X_t = X_0 e^{3t} + \frac{2}{3}(1 - e^{3t}) + e^{3t} W_t$$

Ejemplo 3: solucionar la ecuación diferencial estocástica lineal:

$$dX_t = (X_t + 1\,)dt + e^t W_t dW_t,$$

Se escribe la ecuación como:

$$dX_t - X_t dt = dt + e^t W_t dW_t$$

Se multiplica por el factor integrante $e^{-A(t)}$ donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds = \int_0^t ds = t$

$$(e^{-t} dX_t - e^{-t} X_t dt) = e^{-t} dt + W_t dW_t$$

$$d(e^{-t} X_t) = e^{-t} dt + W_t dW_t$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene

$$e^{-t} X_t = X_0 + \int_0^t e^{-s}\, ds + \int_0^t W_s\, dW_s$$

Dividiendo entre e^{-t} y luego realizando la integración, se produce

$$X_t = X_0 e^t + e^t(1 - e^{-t}) + e^t \left(\frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t\right)$$

$$X_t = X_0e^t + e^t - 1 + \frac{1}{2}e^tW_t^2 - \frac{1}{2}e^tt$$

$$X_t = e^t\left[X_0 + 1 + \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t\right] - 1$$

Ejemplo 4: solucionar la ecuación diferencial estocástica lineal:

$$dX_t = \left(t + \frac{1}{2}X_t\right)dt + e^tsen\,W_t\,dW_t,$$

Se escribe la ecuación como:

$$dX_t - \frac{1}{2}X_tdt = tdt + e^tsen\,W_tdW_t$$

Se multiplica por el factor integrante $e^{-A(t)}$ donde $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t ds = \frac{1}{2}t$

$$e^{-\frac{1}{2}t}dX_t - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}X_tdt = te^{-\frac{1}{2}t}dt + e^{\frac{1}{2}t}sen\,W_tdW_t$$

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}t}X_t\right) = te^{-\frac{1}{2}t}dt + e^{\frac{1}{2}t}sen\,W_tdW_t$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene

$$e^{-\frac{1}{2}t}X_t = X_0 + \int_0^t se^{-\frac{1}{2}s}\,ds + \int_0^t e^{\frac{1}{2}s}sen\,W_sdW_s$$

Dividiendo entre $e^{-\frac{1}{2}t}$ y luego realizando la integración, se produce

$$X_t = X_0e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}\left[-2te^{-\frac{1}{2}t} - 4e^{-\frac{1}{2}t} + 4\right] + e^{\frac{1}{2}t}\left[1 - e^{\frac{1}{2}t}cos\,W_t\right]$$

$$X_t = X_0e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4 + 4e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t} - e^tcos\,W_t$$

$$X_t = X_0e^{\frac{1}{2}t} - 2t - 4 + 5e^{\frac{1}{2}t} - e^tcos\,W_t$$

2.3.8.- Método de variación de parámetros

Considere la siguiente ecuación estocástica:

$$dX_t = \alpha X_tdW_t$$

con α constante. Ésta es la ecuación que, en física se le conoce como el ruido lineal.

Dividiendo ahora por X_t se produce

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha dW_t$$

Cambiando a su forma integral

$$\int \frac{dX_t}{X_t} = \int \alpha dW_t$$

Integrando se obtiene: $\ln X_t = \alpha W_t + c$; con c una constante de integración. Esto lleva a la pseudo solución

$$X_t = e^{\alpha W_t + c}$$

La nominación pseudo representa el hecho de que X_t no satisface la ecuación inicial. Se procede ahora a encontrar una solución correcta que permita al parámetro c ser una función de t. En otras palabras, se está buscando una solución del siguiente tipo:

$$X_t = e^{\alpha W_t + c(t)},$$

donde la función $c(t)$ esta sujeta a ser determinada. Usando la fórmula de Itô se obtiene

Entonces, usando la fórmula de Itô:

$$dX_t = \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_t}{\partial W_t^2}\right) dt + \frac{\partial X_t}{\partial W_t} dW_t$$

Se calcula:

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \frac{\partial\left(e^{\alpha W_t + c(t)}\right)}{\partial t} = c'(t) e^{\alpha W_t + c(t)} dt$$
$$\frac{\partial X_t}{\partial W_t} = \frac{\partial\left(e^{\alpha W_t + c(t)}\right)}{\partial W_t} = \alpha e^{\alpha W_t + c(t)} dW_t$$
$$\frac{\partial^2 X_t}{\partial W_t^2} = \alpha^2 e^{\alpha W_t + c(t)} (dW_t)^2 = \alpha^2 e^{\alpha W_t + c(t)} dt$$

Se reemplaza:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(c'(t) e^{\alpha W_t + c(t)} + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha W_t + c(t)}\right) dt + \alpha e^{\alpha W_t + c(t)} dW_t \\ &= e^{\alpha W_t + c(t)}\left(c'(t) + \frac{1}{2}\alpha^2\right) dt + \alpha e^{\alpha W_t + c(t)} dW_t \\ &= X_t\left(c'(t) + \frac{1}{2}\alpha^2\right) dt + \alpha X_t dW_t \end{aligned}$$

Sustituyendo este último término por la ecuación inicial, se obtiene:

$$dX_t = X_t\left(c'(t) + \frac{1}{2}\alpha^2\right) dt + dX_t$$

Por lo tanto,

$$X_t\left(c'(t)+\frac{1}{2}\alpha^2\right)dt=0$$

$$c'(t)+\frac{1}{2}\alpha^2=0$$

$$c'(t)=-\frac{1}{2}\alpha^2$$

Integrando se obtiene,

$$c(t)=-\frac{\alpha^2}{2}t+k$$

Sustituyendo en X_t se produce,

$$X_t=e^{\alpha W_t-\frac{\alpha^2}{2}t+k}$$

El valor de la constante k es determinado cuando $t=0$. Esto lleva a $X_0=e^k$.

Po lo tanto, la solución de la ecuación inicial es:

$$X_t=X_0e^{\alpha W_t-\frac{\alpha^2}{2}t}.$$

Ejemplo 1: Use el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial estocástica $dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dW_t$, con μ y σ constantes.

Cambiando a su forma integral, después de dividir entre X_t:

$$\int\frac{dX_t}{X_t}=\int\mu dt+\int\sigma dW_t$$

Integrando se obtiene: $\ln X_t=\mu t+\sigma W_t+c$; con c una constante de integración. Esto lleva a la pseudo solución:

$$X_t=e^{\mu t+\sigma W_t+c}.$$

Asumiendo la constante c como $c(t)$, entonces se busca una solución de la forma:

$$X_t=e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}.$$

Aplicando la fórmula de Itô

$$dX_t=\left(\frac{\partial X_t}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_t}{\partial W_t^2}\right)dt+\frac{\partial X_t}{\partial W_t}dW_t$$

Se calcula:

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \frac{\partial\left(e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}\right)}{\partial t} = \left(\mu + c'(t)\right)e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}dt$$
$$\frac{\partial X_t}{\partial W_t} = \frac{\partial\left(e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}\right)}{\partial W_t} = \sigma e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}dW_t$$
$$\frac{\partial^2 X_t}{\partial W_t^2} = \frac{\partial\left(\sigma e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}dW_t\right)}{\partial W_t} = \sigma^2 e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}(dW_t)^2$$
$$= \sigma^2 e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}dt$$

Se reemplaza:

$$dX_t = X_t\left(\left(\mu + c'(t)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma X_t dW_t$$

Restando la ecuación inicial $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ se produce:

$$\left(c'(t) + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 0$$

De donde se obtiene:

$$c'(t) = -\frac{\sigma^2}{2}$$

Al integrar se obtiene la solución:

$$c(t) = -\frac{\sigma^2}{2}t + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en $X_t = e^{\mu t+\sigma W_t+c(t)}$ se produce la solución: $X_t = e^{\mu t+\sigma W_t-\frac{\sigma^2}{2}t+k}$, sacando t como factor común y tomando $X_0 = e^k$, se llega a: $X_t = X_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}$.

Ejemplo 2: Use el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial estocástica $dX_t = X_t W_t dW_t$.

Cambiando a su forma integral, después de dividir entre X_t:

$$\int \frac{dX_t}{X_t} = \int W_t dW_t$$

Integrando se obtiene: $\ln X_t = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + c$; con c una constante de integración. Esto lleva a la pseudo solución:

$$X_t = e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + c}.$$

Asumiendo la constante c como $c(t, W_t) = a(t) + b(W_t)$, entonces se busca una solución de la forma:

$$X_t = e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}.$$

Aplicando la fórmula de Itô

$$dX_t = \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_t}{\partial W_t^2}\right)dt + \frac{\partial X_t}{\partial W_t}dW_t$$

Se calcula:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_t}{\partial t} &= \frac{\partial\left(e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}\right)}{\partial t} \\
&= \left(-\frac{1}{2} + a'(t)\right)e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}dt \\
&= \left(-\frac{1}{2} + a'(t)\right)X_t dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_t}{\partial W_t} &= \frac{\partial\left(e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}\right)}{\partial W_t} \\
&= \left(W_t + b'(W_t)\right)e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}dW_t \\
&= \left(W_t + b'(W_t)\right)X_t dW_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X_t}{\partial W_t^2} &= \frac{\partial\left(\left(W_t + b'(W_t)\right)e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}dW_t\right)}{\partial W_t} \\
&= \left(1 + b''(W_t)\right)e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}(dW_t)^2 \\
&\qquad + \left(W_t + b'(W_t)\right)\left(W_t + b'(W_t)\right)e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t + a(t) + b(W_t)}(dW_t)^2 \\
&= \left(1 + b''(W_t)\right)X_t dt + \left(W_t + b'(W_t)\right)^2 X_t dt \\
&= \left[1 + b''(W_t) + \left(W_t + b'(W_t)\right)^2\right]X_t dt
\end{aligned}$$

Se reemplaza:

$$dX_t = X_t\left(-\frac{1}{2} + a'(t) + \frac{1}{2}\left(1 + b''(W_t) + \left(W_t + b'(W_t)\right)^2\right)\right)dt + \left(W_t + b'(W_t)\right)X_t dW_t$$

$$dX_t = X_t\left(a'(t) + \frac{1}{2}\left(b''(W_t) + \left(W_t + b'(W_t)\right)^2\right)\right)dt + \left(W_t + b'(W_t)\right)X_t dW_t$$

Restando la ecuación inicial $dX_t = X_t W_t dW_t$ se produce:

$$0 = X_t\left(a'(t) + \frac{1}{2}\left(b''(W_t) + \left(W_t + b'(W_t)\right)^2\right)\right)dt + b'(W_t)X_t dW_t$$

Esta ecuación se satisface si se eligen las funciones $a(t)\ y\ b(W_t)$ tal que los coeficientes de $dt\ \ y\ dW_t$ son nulos:

$$a'(t) + \frac{1}{2}b''(W_t) + \frac{1}{2}\left(W_t + b'(W_t)\right)^2 = 0$$
$$b'(W_t) = 0$$

Entonces, derivado de esta segunda ecuación se infiere que b debe ser una constante. Reemplazando en esta primera ecuación queda:

$$a'(t) + \frac{1}{2}(W_t)^2 = 0$$

$$a'(t) = -\frac{1}{2}(W_t)^2$$

Luego $c = a(t) + b(W_t) = -\frac{1}{2}(W_t)^2 t + k$; por lo tanto:

$$X_t = e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}W_t^2 t + K}$$
$$X_t = X_0 e^{\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}W_t^2 t}$$

2.3.9.- Método de factor integrante

Este método puede ser aplicado a la clase de ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t)X_t dW_t,$$

donde $f\ \ y\ \ g$ son funciones determinísticas continuas. El factor integrante esta dado por:

$$\rho_t = e^{-\int_0^t g(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds}$$

La ecuación puede ser llevada a la forma exacta:

$$d(\rho_t X_t) = \rho_t f(t, X_t)dt$$

Sustituyendo $Y_t = \rho_t X_t$ se obtiene que Y_t satisface la ecuación diferencial determinística:

$$dY_t = \rho_t f(t, Y_t/\rho_t)dt,$$

la cual puede ser resuelta por integración o como una ecuación exacta.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = rdt + \alpha X_t dW_t,$$

con r y α constantes.

El factor integrante esta dado por

$$\rho_t = e^{-\int_0^t \alpha dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2 ds} = e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Usando la fórmula de Itô:

$$d\rho_t = \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial W_t^2}\right)dt + \frac{\partial \rho_t}{\partial W_t}dW_t$$

Se puede ver que:

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} = \frac{1}{2}\alpha^2 \rho_t$$

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial W_t} = -\alpha e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} = -\alpha \rho_t$$

$$\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial W_t^2} = \alpha^2 e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} = \alpha^2 \rho_t$$

Por tanto,

$$d\rho_t = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 \rho_t + \frac{1}{2}\alpha^2 \rho_t\right)dt - \alpha \rho_t dW_t$$

$$d\rho_t = \alpha^2 \rho_t dt - \alpha \rho_t dW_t$$

Multiplicando la ecuación anterior por la ecuación $dX_t = rdt + \alpha X_t dW_t$ se obtiene:

$$dX_t\, d\rho_t = (rdt + \alpha X_t dW_t)(\alpha^2 \rho_t dt - \alpha \rho_t dW_t)$$

$$dX_t\, d\rho_t = -\alpha^2 X_t \rho_t (dW_t)^2$$

$$dX_t\, d\rho_t = -\alpha^2 X_t \rho_t dt$$

Multiplicando por ρ_t en la ecuación inicial $dX_t = rdt + \alpha X_t dW_t$ se obtiene:

$$\rho_t dX_t - \alpha \rho_t X_t dW_t = r\rho_t dt,$$

Sumando y restando $\alpha^2 X_t \rho_t dt$ se produce:

$$\rho_t dX_t - \alpha \rho_t X_t dW_t + \alpha^2 X_t \rho_t dt - \alpha^2 X_t \rho_t dt = r\rho_t dt$$

$$\rho_t dX_t + X_t(\alpha^2 \rho_t dt - \alpha \rho_t dW_t) + dX_t\, d\rho_t = r\rho_t dt$$

$$\rho_t dX_t + X_t d\rho_t + dX_t\, d\rho_t = r\rho_t dt$$

La cual, con la virtud de la regla del producto, se consigue:

$$d(\rho_t X_t) = r\rho_t dt$$

Integrando se produce:

$$\rho_t X_t = \rho_0 X_0 + r\int_0^t \rho_s ds$$

Y, por lo tanto, la solución es:

$$X_t = \frac{1}{\rho_t} X_0 + \frac{r}{\rho_t}\int_0^t \rho_s ds$$
$$X_t = e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} X_0 + re^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}\int_0^t e^{-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} ds$$
$$X_t = e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} X_0 + r\int_0^t e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} e^{-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} ds$$
$$X_t = e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} X_0 + r\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 (t-s) + \alpha(W_t - W_s)} ds$$

Ejemplo 2: Sea α una constante. Resolver la siguiente ecuación diferencial estocástica por el método de factores integrantes:

$$dX_t = X_t dt + \alpha X_t dW_t,$$

El factor integrante esta dado por

$$\rho_t = e^{-\int_0^t \alpha dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2 ds} = e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Usando la fórmula de Itô:

$$d\rho_t = \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial W_t^2}\right) dt + \frac{\partial \rho_t}{\partial W_t} dW_t$$

Por tanto,

$$d\rho_t = \left(\frac{1}{2}\alpha^2\rho_t + \frac{1}{2}\alpha^2\rho_t\right)dt - \alpha\rho_t dW_t$$

$$d\rho_t = \alpha^2\rho_t dt - \alpha\rho_t dW_t$$

Multiplicando la ecuación anterior por la ecuación $dX_t = X_t dt + \alpha X_t dW_t$ se obtiene:

$$dX_t\, d\rho_t = (X_t dt + \alpha X_t dW_t)(\alpha^2\rho_t dt - \alpha\rho_t dW_t)$$

$$dX_t\, d\rho_t = -\alpha^2 X_t \rho_t (dW_t)^2$$

$$dX_t\, d\rho_t = -\alpha^2 X_t \rho_t dt$$

Multiplicando por ρ_t en la ecuación inicial $dX_t = X_t dt + \alpha X_t dW_t$ se obtiene:

$$\rho_t dX_t - \alpha\rho_t X_t dW_t = X_t \rho_t dt,$$

Sumando y restando $\alpha^2 X_t \rho_t dt$ se produce:

$$\rho_t dX_t - \alpha\rho_t X_t dW_t + \alpha^2 X_t \rho_t dt - \alpha^2 X_t \rho_t dt = X_t \rho_t dt$$

$$\rho_t dX_t + X_t(\alpha^2\rho_t dt - \alpha\rho_t dW_t) + dX_t\, d\rho_t = X_t \rho_t dt$$

$$\rho_t dX_t + X_t d\rho_t + dX_t\, d\rho_t = X_t \rho_t dt$$

La cual, con la virtud de la regla del producto, se consigue:

$$d(\rho_t X_t) = X_t \rho_t dt$$

Sustituyendo $Y_t = \rho_t X_t$ se obtiene que Y_t satisface la ecuación diferencial determinística:

$$dY_t = \rho_t f(t, Y_t/\rho_t)dt$$

$$dY_t = \rho_t \frac{Y_t}{\rho_t} dt$$

$$dY_t = Y_t dt$$

Integrando se produce:

$$Y_t = ke^t$$

Sea $Y_0 = k$,

$$Y_t = Y_0 e^t$$

$$\rho_t X_t = X_0 e^t$$

Y, por lo tanto, la solución es:

$$X_t = X_0 \frac{e^t}{\rho_t}$$

$$X_t = X_0 e^t e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

$$X_t = X_0 e^{\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha W_t}$$

Ejemplo 3: Sea α una constante. Resolver la siguiente ecuación diferencial estocástica por el método de factores integrantes:

$$dX_t = \alpha X_t dW_t,$$

El factor integrante esta dado por

$$\rho_t = e^{-\int_0^t \alpha dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2 ds} = e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Usando la fórmula de Itô:

$$d\rho_t = \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial W_t^2}\right)dt + \frac{\partial \rho_t}{\partial W_t} dW_t$$

Por tanto,

$$d\rho_t = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 \rho_t + \frac{1}{2}\alpha^2 \rho_t\right)dt - \alpha \rho_t dW_t$$

$$d\rho_t = \alpha^2 \rho_t dt - \alpha \rho_t dW_t$$

$$d\rho_t = \rho_t(\alpha^2 dt - \alpha dW_t)$$

Multiplicando por la ecuación $dX_t = \alpha X_t dW_t$ se obtiene:

$$dX_t\, d\rho_t = (\alpha X_t dW_t)(\alpha^2 \rho_t dt - \alpha \rho_t dW_t)$$

$$dX_t\, d\rho_t = -\alpha^2 X_t \rho_t (dW_t)^2$$

$$dX_t\, d\rho_t = -\alpha^2 X_t \rho_t dt$$

Multiplicando por ρ_t en la ecuación inicial $dX_t = \alpha X_t dW_t$ se obtiene:

$$\rho_t dX_t - \alpha \rho_t X_t dW_t = 0,$$

Sumando y restando $\alpha^2 X_t \rho_t dt$ se produce:

$$\rho_t dX_t - \alpha\rho_t X_t dW_t + \alpha^2 X_t \rho_t dt - \alpha^2 X_t \rho_t dt = 0$$

$$\rho_t dX_t + X_t(\alpha^2 \rho_t dt - \alpha\rho_t dW_t) + dX_t\, d\rho_t = 0$$

$$\rho_t dX_t + X_t d\rho_t + dX_t\, d\rho_t = 0$$

La cual, con la virtud de la regla del producto, se consigue:

$$d(\rho_t X_t) = 0$$

Sustituyendo $Y_t = \rho_t X_t$ se obtiene que Y_t satisface la ecuación diferencial determinística:

$$dY_t = \rho_t f(t, Y_t/\rho_t)dt$$

$$dY_t = 0$$

Integrando se produce:

$$Y_t = k$$

Sea $Y_0 = k$,

$$Y_t = Y_0$$

$$\rho_t X_t = X_0$$

Y, por lo tanto, la solución es:

$$X_t = X_0 \frac{1}{\rho_t}$$

$$X_t = X_0 e^{\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Capítulo 3. Aplicaciones en el componente económico financiero

3.1.- Modelización estocástica de la tasa corta de interés

Modelo en un Mundo Ideal

Considere la cantidad de dinero $M(t)$ en el tiempo t invertida en una cuenta bancaria que paga un interés a una tasa constante r. La ecuación diferencial que modela este tipo de problema es $dM(t) = rM(t)dt$.

Dada la inversión inicial $M(0) = M_0$, el balance de la cuenta en el tiempo t esta dado por la solución de la ecuación $M(t) = M_0 e^{rt}$.

En la mayoría de los casos, r no es constante durante un tiempo largo, esta tasa de interés cambia impredeciblemente en el tiempo, de lo cual se infiere que puede ser representada como un proceso estocástico. Por ejemplo, se puede asumir que dicha tasa de interés en el tiempo t esté determinada por un proceso estocástico continuo $r_t = r + \sigma W_t$, donde $\sigma > 0$ es una constante que controla la volatilidad de la tasa y W_t es un proceso de Wiener. El proceso r_t representa una difusión que empieza en $r_0 = r$, con media constante $E[r_t] = r$ y varianza proporcional con el tiempo transcurrido $Var[r_t] = \sigma^2 t$. Con este cambio en el modelo, el balance de la cuenta en el tiempo t se convierte en un proceso estocástico M_t que satisface la ecuación estocástica $dM_t = (r + \sigma W_t)M_t dt,\ t \geq 0$.

Solución de la ecuación

$$dM_t = r_t M_t dt$$

$$dM_t - r_t M_t dt = 0$$

Se multiplica por el factor integrante $e^{-A(t)}$ donde $A(t) = \int_0^t r_s\, ds$.

$$e^{-\int_0^t r_s ds} dM_t - r_t e^{-\int_0^t r_s ds} M_t dt = 0$$

$$d\left(M_t e^{-\int_0^t r_s ds}\right) = 0$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene

$$M_t e^{-\int_0^t r_s ds} = M_0$$

Dividiendo entre $e^{-\int_0^t r_s ds}$, se produce

$$M_t = M_0 e^{\int_0^t r_s ds}$$

Reemplazando $r_s = r + \sigma W_s$

$$M_t = M_0 e^{\int_0^t (r+\sigma W_s) ds}$$

$$M_t = M_0 e^{rt+\sigma \int_0^t W_s ds}$$

Donde $\int_0^t W_s \, ds = Z_t$ es el proceso de Wiener integrado; luego,

$$M_t = M_0 e^{rt+\sigma Z_t}$$

Dado que, la función generadora de momento de Z_t es $m(\sigma) = E[e^{\sigma Z_t}] = e^{\frac{\sigma^2 t^3}{6}}$, entonces se obtiene:

$$E[e^{\sigma Z_t}] = e^{\frac{\sigma^2 t^3}{6}};$$

$$Var[e^{\sigma Z_t}] = m(2\sigma) - m(\sigma)^2 = e^{\frac{4\sigma^2 t^3}{6}} - e^{\frac{2\sigma^2 t^3}{6}} = e^{\frac{2\sigma^2 t^3}{3}} - e^{\frac{\sigma^2 t^3}{3}} = e^{\frac{\sigma^2 t^3}{3}} \left(e^{\frac{\sigma^2 t^3}{3}} - 1 \right)$$

Entonces, la media y la varianza de la solución $M_t = M_0 e^{rt+\sigma Z_t}$ son:

$$\begin{aligned}
E[M_t] &= M_0 E[e^{rt+\sigma Z_t}] \\
&= M_0 E[e^{rt} e^{\sigma Z_t}] \\
&= M_0 E[e^{rt}] E[e^{\sigma Z_t}] \\
&= M_0 e^{rt} E[e^{\sigma Z_t}] \\
&= M_0 e^{rt} e^{\frac{\sigma^2 t^3}{6}} \\
&= M_0 e^{rt+\frac{\sigma^2 t^3}{6}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[M_t] &= E[(M_0 e^{rt+\sigma Z_t})^2] - E[M_0 e^{rt+\sigma Z_t}]^2 \\
&= E[M_0^2 e^{2rt+2\sigma Z_t}] - M_0^2 E[e^{rt} e^{\sigma Z_t}]^2 \\
&= M_0^2 E[e^{2rt} e^{2\sigma Z_t}] - M_0^2 E[e^{rt}]^2 E[e^{\sigma Z_t}]^2 \\
&= M_0^2 e^{2rt} E[e^{2\sigma Z_t}] - M_0^2 e^{2rt} E[e^{\sigma Z_t}]^2 \\
&= M_0^2 e^{2rt} e^{\frac{4\sigma^2 t^3}{6}} - M_0^2 e^{2rt} \left(e^{\frac{\sigma^2 t^3}{6}} \right)^2 \\
&= M_0^2 e^{2rt} \left(e^{\frac{4\sigma^2 t^3}{6}} - e^{\frac{2\sigma^2 t^3}{6}} \right) \\
&= M_0^2 e^{2rt} Var(e^{\sigma Z_t}) \\
&= M_0^2 e^{2rt} e^{\frac{\sigma^2 t^3}{3}} \left(e^{\frac{\sigma^2 t^3}{3}} - 1 \right) \\
&= M_0^2 e^{2rt+\frac{\sigma^2 t^3}{3}} \left(e^{\frac{\sigma^2 t^3}{3}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

En conclusión, si $M(t)\ y\ M_t$ representan el balance en el tiempo t en el mundo ideal y real, respectivamente, entonces

$$E[M_t] = M_0 e^{rt+\frac{\sigma^2 t^3}{6}} > M_0 e^{rt} = M(t).$$

Esto significa que se espera tener más dinero en la cuenta en un escenario real que en la cuenta de un escenario ideal. Similarmente, un banco puede esperar hacer más dinero cuando presta a una tasa de interés estocástica que a una tasa de interés constante. Esta desigualdad se debe a la convexidad de la función exponencial. Si $X_t = rt + \sigma Z_t$, entonces a partir de la Desigualdad de Jensen se produce:

$$E[e^{rt+\sigma Z_t}] \geq e^{E[rt+\sigma Z_t]} = e^{rt}$$

$$E[e^{X_t}] \geq e^{E[X_t]} = e^{rt}.$$

3.1.1.- Modelos de tipos de interés

En la literatura se pueden distinguir principalmente entre modelos de tipos de interés de Equilibrio y de No Arbitraje. Los primeros realizan una serie de supuestos respecto a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa de interés de corto plazo. En éstos, las estructuras a plazos de tasas de interés y de volatilidades se determinan endógenamente. Por el contrario, los modelos de no arbitraje toman dichas estructuras como exógenas para hacer que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado.

Ambas clases de modelos suponen que la tasa de interés sigue un proceso unifactorial o multifactoriales. Los factores son variables de estado que contienen toda la información disponible. Los factores son también procesos markovianos. Los modelos unifactoriales asumen que la estructura a plazos de tasas de interés se desprende por completo de la tasa de interés de corto plazo. En cambio, los modelos multifactoriales modelan la estructura a plazos de tasas de interés asumiendo que más de un factor, por ejemplo, la tasa de corto y su tendencia, siguen cierto proceso estocástico y, a partir de estos, se determina la estructura a plazos por completo.

Los modelos de equilibrio unifactoriales más relevantes en la literatura son Vasicek (1977), Rendleman y Bartter (1980), Cox-Ingersoll-Ross (1985). Mientras que, los modelos de no arbitraje unifactoriales más importantes han sido los propuestos por Ho y Lee (1986), Hull y White (1990), Black, Derman y Toy (1990) y, Black y Karasinski (1991). Estos últimos modelos lograron una gran aceptación entre los profesionales de las finanzas a principios de la década de los noventas debido a su capacidad de permitir valorar productos exóticos de tipos de interés y de reproducir la estructura de tasas de interés. Y son estos siete modelos los que se abordan en este trabajo:

3.1.1.1.- Modelos de equilibrio

Dado r_t que denota la tasa spot en el tiempo t. Ésta es la tasa a la cual uno puede invertir por un periodo de tiempo muy corto, tales como un día o un segundo. En aras de simplificar, se asume que la tasa de interés r_t satisface una ecuación con una fuente de incertidumbre de la forma:

$$dr_t = m(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t.$$

El término de tendencia y la volatilidad de la tasa spot r_t no dependen explícitamente del tiempo t. El término dt es un intervalo de tiempo que tiende a cero y dW_t es el proceso de Wiener estándar con media cero y varianza dt. Hay bastantes elecciones clásicas para $m(r_t)$ y $\sigma(r_t)$, algunas de las cuales se tratarán en los siguientes modelos.

3.1.1.1.1.- Modelo de Rendleman y Bartter

Este modelo asume que la tasa para tiempos cortos satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu r_t dt + \sigma r_t dW_t.$$

La tasa de crecimiento μ y la volatilidad σ son consideradas constantes. Esta ecuación resuelta en el ejemplo 1 del apartado sobre "el Método de Variación de Parámetros", tiene como solución:

$$r_t = r_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}.$$

La distribución de r_t es log-normal. Usando el ejemplo 2 del apartado "Cálculo de la Media y la Varianza a partir de la Ecuación", la media y la varianza se convierten en:

$$E[r_t] = r_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} E[e^{\sigma W_t}] = r_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = r_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2 t}{2}} = r_0 e^{\mu t}.$$

$$\begin{aligned} Var[r_t] &= r_0^2 e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} Var[e^{\sigma W_t}] = r_0^2 e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\sigma^2 t}\left[e^{\sigma^2 t} - 1\right] \\ &= r_0^2 e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma^2 t}\left[e^{\sigma^2 t} - 1\right] = r_0^2 e^{2\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right]}\left[e^{\sigma^2 t} - 1\right] \\ &= r_0^2 e^{2\mu t}\left[e^{\sigma^2 t} - 1\right]. \end{aligned}$$

Ahora se abordarán dos modelos que incorporan el fenómeno de reversión a la media de tasas de interés. Esto significa que en el largo plazo la tasa converge hacia un nivel promedio. Estos modelos son más realistas y son basados en argumentos económicos.

3.1.1.1.2.- Modelo de Vasicek

El supuesto de Vasicek es que la tasa de interés de corto plazo debe satisfacer la ecuación diferencial estocástica de reversión a la media:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

Con a, b, σ constantes positivas y conocidas. En este caso, como puede observarse, W_t es la única fuente de incertidumbre. El término σdW_t adiciona algo de "ruido blanco" al proceso.

Asumiendo que las tasas spot son determinísticas, se toma $\sigma = 0$ y se obtiene la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$dr_t = a(b - r_t)dt.$$

Al resolver ésta como una ecuación diferencial lineal se produce la solución:

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at}.$$

Esto implica que la tasa r_t es forzada a moverse, en promedio, hacia un nivel de largo plazo b a una velocidad a. Esto significa que, si $r_0 > b$ entonces r_t es forzada a moverse, en promedio, hacia abajo al nivel b y, viceversa, si $r_0 < b$ entonces r_t es forzada a moverse, en promedio, hacia arriba al nivel b.

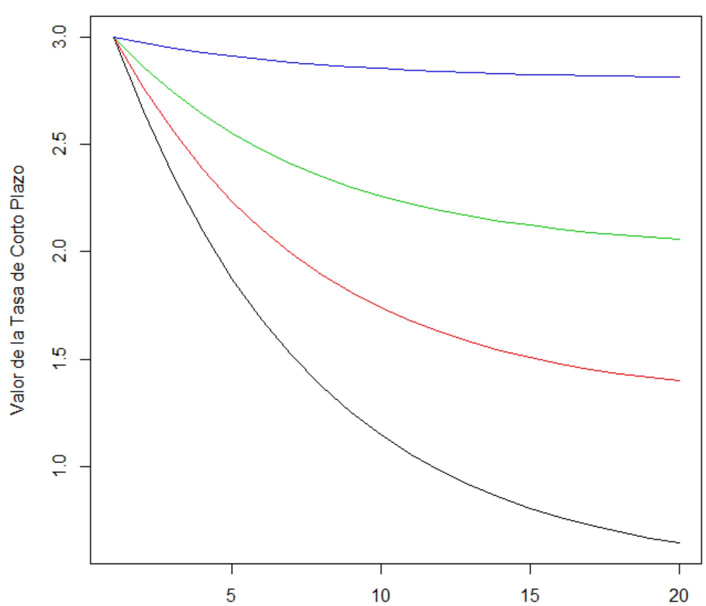

Figura 1: Simulación de $r_t = b + (r_0 - b)e^{-at}$, con $r_0 > b$, $r_0 = 3$, $a = 1.5$, $b = 0.5\ (Curva\ Negra), b = 1.3\ (Roja), b = 2\ (Verde)\ \ y\ \ b = 2.8\ (Azul)$.

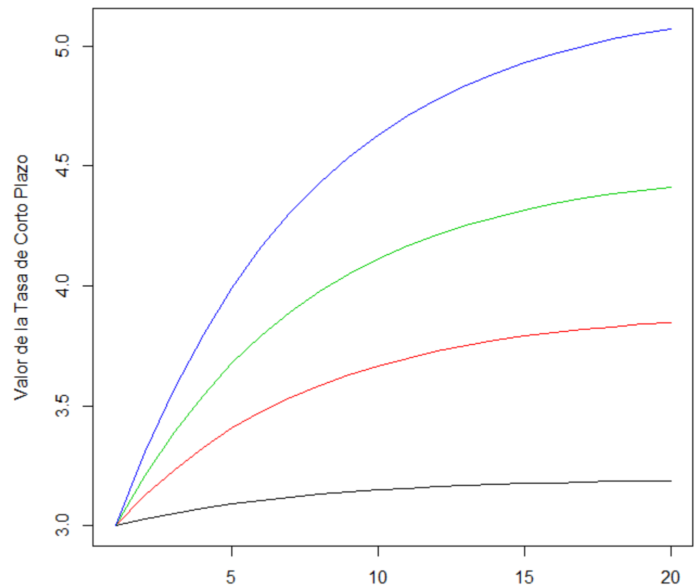

Figura 2: Simulación de $r_t = b + (r_0 - b)e^{-at}$, con $r_0 < b$, $r_0 = 3$, $a = 1.5$, $b = 3.2$ $(Curva\ Negra), b = 3.9$ $(Roja), b = 4.5$ $(Verde)$ y $b = 5.2$ $(Azul)$.

Vale la pena mencionar que la ecuación $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$ es una notación simplificada de la integral estocástica

$$r_t - r_s = \int_s^t a(b - r_u)du + \int_s^t \sigma dW_u$$

$$r_t - r_s = ab(t - s) - \int_s^t r_u du + \sigma \int_s^t dW_u$$

Con $\sigma \neq 0$, la solución de la ecuación $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$ es:

$$dr_t = abdt - ar_t dt + \sigma dW_t$$

$$dr_t + ar_t dt = abdt + \sigma dW_t$$

Se multiplica por el factor integrante e^{at}

$$e^{at}dr_t + ae^{at}r_t dt = abe^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$

$$d(e^{at}r_t) = abe^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$

Integrando entre 0 y t

$$e^{at}r_t = r_0 + ab\int_0^t e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$e^{at}r_t = r_0 + ab\left(\frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}e^{0}\right) + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = r_0 e^{-at} + b e^{-at}(e^{at} - 1) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Se llega a la solución:

$$r_t = b + (r_0 - b) e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Este proceso r_t es Gaussiano con media y varianza:

$$\begin{aligned} E[r_t] &= b + (r_0 - b) e^{-at}; \\ Var[r_t] &= Var\left[\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds \\ &= \sigma^2 e^{-2at} \left(\frac{1}{2a} e^{2at} - \frac{1}{2a} e^{0}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \end{aligned}$$

Se llega entonces a que,

$$r_t \sim N\left(b + (r_0 - b) e^{-at},\ \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$$

Lo anterior debido a que la tasa spot r_t es la suma entre la función predecible $b + (r_0 - b) e^{-at}$ y un múltiplo de una integral de Wiener, la cual es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza $\int_a^b f(t)^2 dt$.

El nombre de tasa de interés de reversión a la media se explica a continuación:

Dado que $\lim_{t \to \infty} E[r_t] = \lim_{t \to \infty} [b + (r_0 - b) e^{-at}] = b$, esto hace que la tasa spot r_t tienda a b cuando $t \to \infty$. La varianza tiende en el largo plazo a $\frac{\sigma^2}{2a}$. Esta varianza es inversamente proporcional a a, si tengo una velocidad de reversión a la media mayor tendría una varianza menor, y viceversa.

Específicamente, en el largo plazo,

$$r_t \sim N\left(b,\ \frac{\sigma^2}{2a}\right)$$

Dado que r_t esta normalmente distribuido, el modelo de Vasicek ha sido criticado porque este permite tasas de interés negativas y tasas grandes ilimitadas.

Es importante notar que, la representación de la solución r_t está en términos de la integral $\int_0^t e^{as} dW_s$, por lo que, se hace necesario disponer de estrategias para simular dicha integral. Para ello, se propone lo siguiente:

Por un lado, dada la propiedad de normalidad de la integral de Itô, con $g(s)$ una función determinística, $\int_0^t g(s)\, dW(s) \sim N\left[0; \int_0^t \left(g(s)\right)^2 ds\right]$ se llega a:

$$\int_0^t e^{as} dW_s \sim N\left[0; \int_0^t e^{2as}\, ds\right]$$

Resolviendo la integral determinística de la varianza,

$$\int_0^t e^{2as}\, ds = \frac{1}{2a}(e^{2at} - e^0) = \frac{1}{2a}(e^{2at} - 1),$$

esto es,

$$\int_0^t e^{as} dW_s \sim N\left[0; \frac{1}{2a}(e^{2at} - 1)\right],$$

o equivalentemente,

$$\int_0^t e^{as} dW_s \overset{d}{=} \int_0^t e^{2as}\, dW_s = \int_0^t e^{2as} W_s' ds = W_t \int_0^t e^{2as} ds = W_t \left(\frac{1}{2a}(e^{2at} - 1)\right)$$

donde $\overset{d}{=}$ significa igualdad en distribución.

Ahora, teniendo en cuenta que, el proceso de Wiener es un proceso estocástico $\frac{1}{2}$ $-$autosemejante[1], considere dos instantes de tiempo t y kt donde k es una constante positiva, entonces se tiene que, la varianza del proceso de Wiener en ambos instantes puede relacionarse de la siguiente manera:

$$\sigma_w^2(kt) \overset{d}{=} \sqrt{k}\, \sigma_w^2(t).$$

Por tanto, las propiedades del proceso de Wiener ante un cambio de escala $t \longrightarrow kt$ son las mismas que en t una vez que se multiplica $\sigma_w^2(t)$ por el factor de escala $\sqrt{k}$; en otras palabras, las propiedades estadísticas del proceso de Wiener no cambian bajo la transformación

[1] Esto es, cualquier parte del proceso de Wiener es similar al todo después de una transformación de escala no isotrópica (es decir, la escala varía sistemáticamente dependiendo de la dirección, no es idéntica en todas las direcciones).

$$W(kt) \to \sqrt{k}W(t).$$

La propiedad anterior nos lleva a asumir la siguiente igualdad:

$$\int_0^t e^{as} dW_s = \frac{1}{\sqrt{2a}} W_t(e^{2at} - 1)$$

Por tanto, la solución r_t en términos del proceso de Wiener re-escalado en el tiempo queda de la siguiente manera:

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma e^{-at} \frac{1}{\sqrt{2a}} W_t(e^{2at} - 1)$$

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \frac{\sigma e^{-at}}{\sqrt{2a}} W_t(e^{2at} - 1)$$

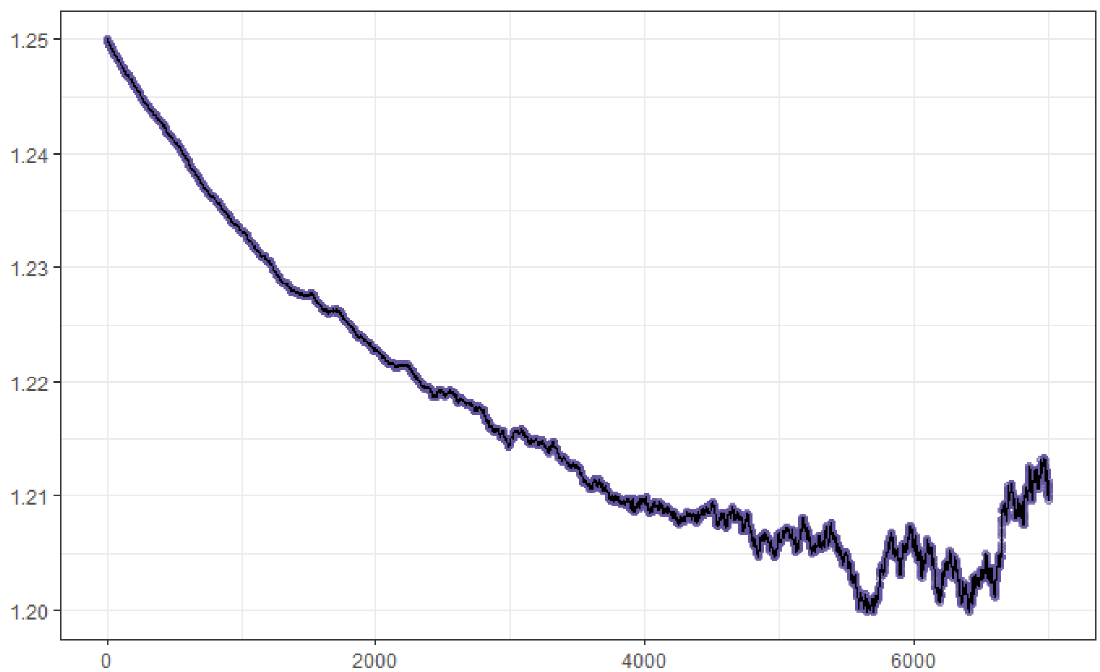

Figura 3: Simulación de $r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \frac{\sigma e^{-at}}{\sqrt{2a}} W_t\left(e^{2at} - 1\right)$,
con $r_0 = 1.25$, $b = 1.2$, $a = 3$, $\sigma = 1\%$.

Con el propósito de facilitar aún más el proceso de simulación, obsérvese que utilizando la representación:

$$W(t) \overset{d}{=} \sqrt{t}\, Z, \qquad Z \sim [0,1],$$

la expresión de r_t puede escribirse equivalentemente como:

$$r_t \overset{d}{=} b + (r_0 - b)e^{-at} + \frac{\sigma e^{-at}\sqrt{e^{2at-1}}}{\sqrt{2a}} Z, \qquad Z \sim [0,1],$$

3.1.1.1.3.- Modelo de Cox-Ingersoll-Ross

Este modelo abreviado con la sigla CIR asume que la tasa spot verifica la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

con a, b, σ constantes positivas y conocidas, r_t es la tasa de interés, t es el tiempo y W_t denota el proceso de Wiener estándar. Es importante notar que, al considerar $\sqrt{r_t}$ en el término estocástico, el proceso de la tasa corta deja de tener una distribución normal, esto es, este proceso no es Gaussiano. De hecho, en este caso, la distribución corresponde a una χ^2 no central. Esta es la gran diferencia con el modelo de Vasicek, dado que el término de volatilidad no es constante, sino que es proporcional a la raíz cuadrada del nivel de la tasa de interés, $\sigma\sqrt{r_t}$.

Dos ventajas principales de este modelo son:

1. El proceso exhibe reversión a la media.
2. No es posible que las tasas de interés sean negativas.

Un proceso que satisface la anterior ecuación diferencial es llamado proceso CIR. A continuación, sus primeros dos momentos:

Integrando la ecuación $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$ entre 0 y t el cual produce:

$$r_t = r_0 + abt - a\int_0^t r_s ds + \sigma\int_0^t \sqrt{r_s}dW_s$$

Tomando expectativas, se obtiene:

$$E[r_t] = r_0 + abt - a\int_0^t E[r_s]ds$$

Sea $\mu(t) = E[r_t]$. Entonces diferenciar con respecto a t en

$$\mu(t) = r_0 + abt - a\int_0^t \mu(s)ds,$$

produce la ecuación diferencial $\mu'(t) = ab - a\mu(t)$

multiplicando por el factor integrante e^{at} se llega a:

$$e^{at}\mu'(t) = abe^{at} - ae^{at}\mu(t)$$

$$e^{at}\mu'(t) + ae^{at}\mu(t) = abe^{at}$$

$$d\left(e^{at}\mu(t)\right) = abe^{at}$$

integrando y sabiendo que $\mu(0) = r_0$, entonces la solución es:

$$e^{at}\mu(t) = \mu(0) + ab\int_0^t e^{as}ds$$

$$e^{at}\mu(t) = \mu(0) + \left(\frac{1}{a}\right)abe^{at} - \left(\frac{1}{a}\right)abe^{0}$$

$$\mu(t) = r_0e^{-at} + b - be^{-at}$$

$$\mu(t) = b + e^{-at}(r_0 - b)$$

$$E[r_t] = b + (r_0 - b)e^{-at}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} E[r_t] = \lim_{t\to\infty}[b + e^{-at}(r_0 - b)] = b$$

Lo cual muestra que el proceso es reversible a la media.

Calculando el segundo momento y tomando $\mu_2(t) = E[r_t^2]$.

Por la regla del producto y teniendo en cuenta que, $(dt)^2 = 0$, $(dW_t)^2 = dt$ y $(dt)(dW_t) = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} d(r_t^2) = d(r_tr_t) = r_tdr_t + r_tdr_t + dr_tdr_t &= 2r_tdr_t + (dr_t)^2 \\ &= 2r_t\left(a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t\right) + \left(a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t\right)^2 \\ &= 2r_tabdt - 2r_t^2adt + 2r_t\sigma\sqrt{r_t}dW_t + \sigma^2r_tdt \\ &= [(2ab + \sigma^2)r_t - 2r_t^2a]dt + 2r_t^{3/2}\sigma dW_t \end{aligned}$$

Integrando se obtiene

$$r_t^2 = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\int_0^t r_s\,ds - 2a\int_0^t r_s^2\,ds + 2\sigma\int_0^t r_s^{3/2}\,dW_s$$

Tomando expectativas se llega a:

$$E[r_t^2] = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\int_0^t E[r_s]\,ds - 2a\int_0^t E[r_s^2]\,ds$$

$$\mu_2(t) = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\int_0^t \mu(s)\,ds - 2a\int_0^t \mu_2(s)\,ds$$

Diferenciando de nuevo,

$$\mu_2'(t) = (2ab + \sigma^2)\mu(t) - 2a\mu_2(t)$$

Resolviendo como una ecuación diferencial lineal en $\mu_2(t)$ se produce:

$$\mu_2'(t) + 2a\mu_2(t) = (2ab + \sigma^2)\mu(t)$$

multiplicando por el factor integrante e^{2at} se llega a:

$$e^{2at}\mu_2'(t) + 2ae^{2at}\mu_2(t) = (2ab + \sigma^2)e^{2at}\mu(t)$$

$$d\big(e^{2at}\mu_2(t)\big) = (2ab + \sigma^2)e^{2at}\mu(t)$$

$$e^{2at}\mu_2(t) = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\int_0^t e^{2as}[b + e^{-as}(r_0 - b)]ds$$

$$e^{2at}\mu_2(t) = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\left[\int_0^t e^{2as}bds + \int_0^t e^{as}(r_0 - b)ds\right]$$

$$e^{2at}\mu_2(t) = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\left[\frac{b}{2a}e^{2at} - \frac{b}{2a} + (r_0 - b)\frac{1}{a}e^{at} - (r_0 - b)\frac{1}{a}\right]$$

Luego se tiene:

$$\begin{aligned}\mu_2(t) &= r_0^2e^{-2at} + (2ab + \sigma^2)\left[\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + \frac{(r_0 - b)}{a}(e^{-at} - e^{-2at})\right]\\ &= r_0^2e^{-2at} + (2ab + \sigma^2)\left[\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + \frac{(r_0 - b)}{a}(1 - e^{-at})e^{-at}\right]\end{aligned}$$

Dado que,

$$\begin{aligned}Var[r_t] &= E[r_t^2] - (E[r_t])^2\\ &= r_0^2e^{-2at} + (2ab + \sigma^2)\left[\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + \frac{(r_0 - b)}{a}(1 - e^{-at})e^{-at}\right]\\ &\quad - \big(b + e^{-at}(r_0 - b)\big)^2\\ &= r_0^2e^{-2at} + 2ab\left[\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + \frac{(r_0 - b)}{a}(1 - e^{-at})e^{-at}\right]\\ &\quad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + \frac{(r_0 - b)}{a}(1 - e^{-at})e^{-at}\right]\\ &\quad - (b^2 + 2be^{-at}(r_0 - b) + e^{-2at}(r_0 - b)^2)\\ &= r_0^2e^{-2at} + 2ab\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + 2ab\frac{(r_0 - b)}{a}(1 - e^{-at})e^{-at}\\ &\quad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}) + \frac{(r_0 - b)}{a}(1 - e^{-at})e^{-at}\right]\\ &\quad - \big(b^2 + 2be^{-at}(r_0 - b) + e^{-2at}(r_0^2 - 2r_0b + b^2)\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= b^2(1-e^{-2at}) + 2b(r_0-b)(1-e^{-at})e^{-at} \\
&\qquad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{(r_0-b)}{a}(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&\qquad - \left(b^2 + 2be^{-at}(r_0-b) + e^{-2at}(-2r_0b+b^2)\right) \\
&= b^2 - b^2e^{-2at} + 2b(r_0-b)(1-e^{-at})e^{-at} \\
&\qquad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{(r_0-b)}{a}(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&\qquad - b^2 - 2be^{-at}(r_0-b) - e^{-2at}(-2r_0b+b^2) \\
&= -b^2e^{-2at} + 2b(r_0-b)(1-e^{-at})e^{-at} \\
&\qquad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{(r_0-b)}{a}(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&\qquad - 2be^{-at}(r_0-b) + 2r_0be^{-2at} - b^2e^{-2at} \\
&= 2be^{-at}(r_0-b)(1-e^{-at}) \\
&\qquad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{(r_0-b)}{a}(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&\qquad - 2be^{-at}(r_0-b) + 2be^{-2at}(r_0-b) \\
&= 2be^{-at}(r_0-b)(1-e^{-at}) \\
&\qquad + \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{(r_0-b)}{a}(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&\qquad - 2be^{-at}(r_0-b)(1-e^{-at}) \\
&= \sigma^2\left[\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{(r_0-b)}{a}(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&= \frac{b\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{\sigma^2}{a}(1-e^{-at})r_0e^{-at} - \frac{b\sigma^2}{a}(1-e^{-at})e^{-at} \\
&= r_0\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)(1-e^{-at})e^{-at} + \frac{b\sigma^2}{2a}\left[(1-e^{-2at}) - 2(1-e^{-at})e^{-at}\right] \\
&= r_0\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)(1-e^{-at})e^{-at} + \frac{b\sigma^2}{2a}\left[(1-e^{-2at}) - (2e^{-at}-2e^{-2at})\right] \\
&= r_0\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)(1-e^{-at})e^{-at} + \frac{b\sigma^2}{2a}\left[1-e^{-2at}-2e^{-at}+2e^{-2at}\right] \\
&= r_0\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)(1-e^{-at})e^{-at} + \frac{b\sigma^2}{2a}\left[1-2e^{-at}+e^{-2at}\right] \\
&= r_0\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)(1-e^{-at})e^{-at} + \frac{b\sigma^2}{2a}\left[1-e^{-at}\right]^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, cuando $t \to \infty$, todas estas exponenciales tienden a cero, por lo que:

$$
\lim_{t\to\infty} Var[r_t] = \lim_{t\to\infty}\left[r_0\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)(e^{-at}-e^{-2at}) + \frac{b\sigma^2}{2a}\left[1-e^{-at}\right]^2\right] = \frac{b\sigma^2}{2a}
$$

Cabe notar que, al contrario del modelo de Vasicek, no hay una solución explícita real para el modelo CIR.

3.1.1.2.- Modelos de no arbitraje

El supuesto fundamental de estos modelos es: “si los mercados están en equilibrio, entonces no pueden existir oportunidades de arbitraje”. Respecto a la tasa *drift* del modelo, ésta es dependiente del tiempo e independiente del nivel de la tasa corta, y es elegida tal que el modelo es consistente con la estructura de plazos de la tasa de interés; es importante aclarar que, para determinar esta estructura se establece la tasa de interés a todos los plazos existentes de acuerdo con los diferentes vencimientos del activo financiero en cuestión.

3.1.1.2.1.- Modelo de Ho y Lee

La ecuación diferencial estocástica que representa el comportamiento de la tasa corta en este modelo es:

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

Donde $\theta(t)$ determina, en promedio, hacia donde se moverá r_t en el futuro, también se considerada independiente de r_t y se elegirá de tal manera que sea consistente con la estructura de plazos; mientras que σ es constante, es decir, independiente del nivel de la tasa corta y del tiempo.

El proceso de solución estocástico de la tasa corta es Gaussiano y está dado por:

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma \int_0^t dW_t \\ &= r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t \end{aligned}$$

En este caso, la media y varianza de la tasa corta satisfacen, respectivamente,

$$E[r_t] = r_0 + \int_0^t \theta(s)ds$$

$$Var[r_t] = \sigma^2 t,$$

Si $F(0,t)$ denota la tasa a plazo (tasa forward) en el tiempo t estimada desde el tiempo 0, y en virtud de que, $\theta(t) = \frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + \sigma^2 t$, se tiene:

$$dr_t = \left(\frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + \sigma^2 t\right)dt + \sigma dW_t.$$

Es decir, la tendencia de la tasa corta está dada por la pendiente de la tasa forward más un término lineal en t.

En este caso la solución a la que se llega es:

$$r_t = r_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s}F(0,s) + \sigma^2 s\right) ds + \sigma W_t$$

$$r_t = r_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}F(0,s)ds + \int_0^t \sigma^2 s ds + \sigma W_t$$

$$r_t = r_0 + F(0,t) - F(0,0) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t$$

$$r_t = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t$$

ya que $F(0,0) = r_0$.

Por otro lado, también se obtiene $E[r_t] = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2$.

3.1.1.2.2.- Modelo de Hull y White

El modelo propuesto por Hull y White es una extensión del modelo de Ho y Lee que incorpora reversión a la media:

$$dr_t = \overbrace{(\theta(t) - ar_t)dt}^{tendencia} + \underbrace{\sigma\, dW_t}_{estocástico}$$

con a y σ constantes. El parámetro a mide la velocidad de reversión a la media. El parámetro σ es la volatilidad de los cambios de los cambios de la tasa de interés de corto plazo, la cual puede asumirse constante o como una función determinística del tiempo. El hecho de que $\theta(t)$ sea una función del tiempo es lo que permite ajustar el modelo a diferentes estructuras a plazos de tasas de interés.

Para solucionar la ecuación se multiplica por el factor integrante e^{at}

$$e^{at}dr_t = \theta(t)e^{at}dt - ae^{at}r_t dt + \sigma e^{at}dW_t$$

$$e^{at}dr_t + ae^{at}r_t dt = \theta(t)e^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$

$$e^{at}dr_t + r_t ae^{at}dt = \theta(t)e^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$

$$d(e^{at}r_t) = \theta(t)e^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$

Integrando entre 0 y t se produce:

$$e^{at}r_t = r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = r_0e^{-at} + e^{-at}\int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

Dado que los primeros dos términos son determinísticos y el último término es una integral de Wiener, el proceso r_t es Gaussiano.

La función $\theta(t)$ puede ser calculada a partir de la estructura de plazos $F(0,t)$ como

$$\theta(t) = \frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^t \theta(s)e^{as}ds &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}F(0,s)e^{as}ds + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t \frac{(1-e^{-2as})e^{as}}{2}ds \\
&= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}F(0,s)e^{as}ds + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t \frac{(e^{as}-e^{-as})}{2}ds \\
&= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}F(0,s)e^{as}ds + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t senh(as)ds \\
&= F(0,t)e^{at} - F(0,0)e^0 + \frac{\sigma^2}{a}\left[\frac{1}{a}cosh(at) - \frac{1}{a}cosh(0)\right] \\
&= F(0,t)e^{at} - r_0 + \frac{\sigma^2}{a^2}[cosh(at) - 1]
\end{aligned}$$

donde se asume que $F(0,0) = r_0$.

Continuando para hallar la solución, se tiene:

$$r_t = r_0e^{-at} + e^{-at}\left(F(0,t)e^{at} - r_0 + \frac{\sigma^2}{a^2}[cosh(at) - 1]\right) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = r_0e^{-at} + F(0,t)e^{at}e^{-at} - r_0e^{-at} + \frac{\sigma^2}{a^2}[cosh(at) - 1]e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{a^2}\left[\frac{(e^{at}+e^{-at})}{2} - 1\right]e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}[e^{at} + e^{-at} - 2]e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}[1 + e^{-2at} - 2e^{-at}] + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}[1 - e^{-at}]^2 + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

La media y varianzas son:

$$E[r_t] = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}[1 - e^{-at}]^2$$

$$\begin{aligned} Var[r_t] &= \sigma^2 e^{-2at} Var \int_0^t e^{as} dW_s \\ &= \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds \\ &= \sigma^2 e^{-2at} \left(\frac{1}{2a} (e^{2at} - 1) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} e^{-2at} (e^{2at} - 1) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \end{aligned}$$

3.1.1.2.3.- Modelo de Black, Derman y Toy

El árbol binomial de Black, Derman y Toy, es equivalente con el siguiente modelo continuo de tasa de corta duración

$$d(\ln r_t) = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r_t \right] dt + \sigma(t) dW_t$$

Haciendo la sustitución $u_t = \ln r_t$, se obtiene una ecuación diferencial lineal en u_t

$$du_t = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'^{(t)}}{\sigma(t)} u_t \right] dt + \sigma(t) dW_t$$

La ecuación puede ser escrita equivalentemente como:

$$du_t = \theta(t) dt + \frac{\sigma'^{(t)}}{\sigma(t)} u_t dt + \sigma(t) dW_t$$

$$du_t - \frac{\sigma'^{(t)}}{\sigma(t)} u_t dt = \theta(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

$$\frac{\sigma(t) du_t - \sigma'^{(t)} u_t dt}{\sigma(t)} = \theta(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

$$\frac{\sigma(t) du_t - u_t d\sigma(t)}{\sigma^2(t)} = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)} dt + dW_t$$

Aplicando la regla del cociente de derecha a izquierda, se consigue:

$$d\left[\frac{u_t}{\sigma(t)} \right] = \frac{\theta(t)}{\sigma(t)} dt + dW_t$$

Integrando entre 0 y t se llega a:

$$\frac{u_t}{\sigma(t)} = \frac{u_0}{\sigma(0)} + \int_0^t \frac{\theta(s)}{\sigma(s)} ds + \int_0^t dW_s$$

$$u_t = \frac{u_0}{\sigma(0)}\sigma(t) + \sigma(t)\int_0^t \frac{\theta(s)}{\sigma(s)} ds + \sigma(t)W_t$$

Dado que los primeros dos términos son determinísticos y el último término es una integral de Wiener, el proceso u_t es Gaussiano y, por tanto, $r_t = e^{u_t}$ es log-normal para cada t. Usando $u_0 = \ln r_0$, se tiene,

$$e^{\frac{u_0}{\sigma(0)}\sigma(t)} = e^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}u_0} = e^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}\ln r_0} = e^{\ln r_0^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}}} = r_0^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}},$$

Luego, aplicando exponencial a la ecuación de u_t y sustituyendo:

$$e^{u_t} = e^{\frac{u_0}{\sigma(0)}\sigma(t)+\sigma(t)\int_0^t\frac{\theta(s)}{\sigma(s)}ds+\sigma(t)W_t}$$

$$e^{u_t} = e^{\frac{u_0}{\sigma(0)}\sigma(t)} e^{\sigma(t)\int_0^t\frac{\theta(s)}{\sigma(s)}ds} e^{\sigma(t)W_t}$$

$$r_t = r_0^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}} e^{\sigma(t)\int_0^t\frac{\theta(s)}{\sigma(s)}ds} e^{\sigma(t)W_t}.$$

Ya que, $\sigma(t)W_t$ está normalmente distribuido con media 0 y varianza $\sigma^2(t)t$, la variable log-normal $e^{\sigma(t)W_t}$ tiene

$$\begin{aligned}
E\left[e^{\sigma(t)W_t}\right] &= e^{\sigma^2(t)t/2} \\
Var\left[e^{\sigma(t)W_t}\right] &= E\left[e^{2\sigma(t)W_t}\right] - \left(E\left[e^{\sigma(t)W_t}\right]\right)^2 \\
&= \left(e^{\left(2\sigma(t)\right)^2 t/2}\right) - \left(e^{\sigma^2(t)t/2}\right)^2 \\
&= e^{2\sigma^2(t)t} - e^{\sigma^2(t)t} \\
&= e^{\sigma^2(t)t}\left(e^{\sigma^2(t)t} - 1\right)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E[r_t] &= r_0^{\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}} e^{\sigma(t)\int_0^t\frac{\theta(s)}{\sigma(s)}ds} e^{\sigma^2(t)t/2} \\
Var[r_t] &= r_0^{\frac{2\sigma(t)}{\sigma(0)}} e^{2\sigma(t)\int_0^t\frac{\theta(s)}{\sigma(s)}ds} e^{\sigma^2(t)t}\left(e^{\sigma^2(t)t} - 1\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 1: Resolver el Modelo de Black, Derman y Toy en el caso cuando σ es constante.

$$d(\ln r_t) = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

Integrando entre 0 y t se llega a:

$$\ln r_t = \ln r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

$$\ln r_t = \ln r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t$$

Donde $\ln r_t$ está distribuido normalmente y, por tanto,

$$r_t = e^{\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}$$

$$r_t = e^{\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}$$

$$r_t = r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}$$

Esto es, r_t está distribuido log-normalmente.

Por tanto, la media y la varianza de r_t son:

$$\begin{aligned}
E[r_t] &= E\left[r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}\right] \\
&= r_0 E\left[e^{\int_0^t \theta(s)ds} e^{\sigma W_t}\right] \\
&= r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \\
Var[r_t] &= Var\left[r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}\right] \\
&= E\left[\left(r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}\right)^2\right] - \left(E\left[r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}\right]\right)^2 \\
&= E\left[r_0^2 e^{2\int_0^t \theta(s)ds + 2\sigma W_t}\right] - \left(E\left[r_0 e^{\int_0^t \theta(s)ds + \sigma W_t}\right]\right)^2 \\
&= {r_0}^2 e^{2\int_0^t \theta(s)ds}\left(e^{(2\sigma)^2 t/2}\right) - {r_0}^2 e^{2\int_0^t \theta(s)ds}\left(e^{\sigma^2 t/2}\right)^2 \\
&= {r_0}^2 e^{2\int_0^t \theta(s)ds} e^{2\sigma^2 t} - {r_0}^2 e^{2\int_0^t \theta(s)ds} e^{\sigma^2 t} \\
&= {r_0}^2 e^{2\int_0^t \theta(s)ds} e^{\sigma^2 t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)
\end{aligned}$$

3.1.1.2.4.- Modelo de Black y Karasinski

Black y Karasinski propusieron el siguiente modelo más general para la tasa spot:

$$d(\ln r_t) = [\theta(t) - a(t)\ln r_t]dt + \sigma(t)dW_t$$

Donde $\theta(t)$, $a(t)$ y $\sigma(t)$ son parámetros los cuales pueden ser asumidos de manera que el modelo se ajuste a la estructura de plazos actual, constituyendo así, un modelo de no arbitraje.

La diferencia con el Modelo de Hull y White radica en que Black y Karasinski modelan los cambios logarítmicos de la tasa de interés de corto plazo y no los cambios simples. En este modelo $a(t)$ representa la velocidad de reversión a la media del logaritmo de la tasa de interés de corto plazo, $\theta(t)/a(t)$ es el nivel de reversión a la media y $\sigma(t)$ es la volatilidad de los cambios en $\ln r_t$, es decir, la volatilidad de los cambios proporcionales de r.

Haciendo la sustitución $u_t = \ln r_t$, se obtiene:

$$du_t = [\theta(t) - a(t)u_t]dt + \sigma(t)dW_t$$

$$du_t + a(t)u_t dt = \theta(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{\int_0^t a(s)ds}$

$$e^{\int_0^t a(s)ds}du_t + \left(a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt\right)u_t = \theta(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt + \sigma(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_t$$

$$d\left(e^{\int_0^t a(s)ds}u_t\right) = \theta(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt + \sigma(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_t$$

Integrando entre 0 y t se llega a:

$$e^{\int_0^t a(s)ds}u_t = u_0 + \int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s$$

$$u_t = e^{-\int_0^t a(s)ds}u_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s$$

$$\ln r_t = e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s$$

$$r_t = e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}$$

La media y la varianza del modelo vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$E[r_t] = E\left[e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right]$$

$$E[r_t] = e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds}E\left[e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right]$$

$$E[r_t] = e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds}e^{\frac{1}{2}e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}(dW_s)^2}$$

$$E[r_t] = e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + \frac{1}{2}e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}$$

$$Var[r_t] = Var\left[e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right]$$

$$= E\left[\left(e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right)^2\right]$$
$$- \left(E\left[e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right]\right)^2$$
$$= E\left[e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right]$$
$$- \left(e^{e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + \frac{1}{2}e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}\right)^2$$
$$= e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds} E\left[e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma(s)e^{\int_0^t a(s)ds}dW_s}\right]$$
$$- e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}$$
$$= e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds} e^{\frac{1}{2}2^2 e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}(dW_s)^2}$$
$$- e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}$$
$$= e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + 2e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}$$
$$- e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}$$
$$= e^{2e^{-\int_0^t a(s)ds}\ln r_0 + 2e^{-\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \theta(s)e^{\int_0^t a(s)ds}ds + e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds}$$
$$\left(e^{e^{-2\int_0^t a(s)ds}\int_0^t \sigma^2(s)e^{2\int_0^t a(s)ds}ds} - 1\right)$$

Ejemplo 1: Analizar el Modelo de Black y Karasinski con a y σ constante.

$$d(\ln r_t) = [\theta(t) - a\ln r_t]dt + \sigma dW_t$$

Haciendo la sustitución $u_t = \ln r_t$, se obtiene:

$$du_t = [\theta(t) - au_t]dt + \sigma dW_t$$
$$du_t + au_t dt = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

Multiplicando por el factor integrante e^{at}

$$e^{at}du_t + (ae^{at}dt)u_t = \theta(t)e^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$
$$d(e^{at}u_t) = \theta(t)e^{at}dt + \sigma e^{at}dW_t$$

Integrando entre 0 y t se llega a:

$$e^{at}u_t = u_0 + \int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$u_t = e^{-at}u_0 + e^{-at}\int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$\ln r_t = e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-at}e^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{-at}e^{as}dW_s$$

$$\ln r_t = e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s$$

$$r_t = e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}$$

La media y la varianza del modelo vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
E[r_t] &= E\left[e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}\right] \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} E\left[e^{\sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}\right] \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^t e^{-2a(t-s)}(dW_s)^2} \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^t e^{-2a(t-s)}ds} \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 e^{-2at}\int_0^t e^{2as}ds} \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 e^{-2at}\frac{1}{2a}\left(e^{2at}-e^{0}\right)} \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{4a}\sigma^2 e^{-2at}\left(e^{2at}-1\right)} \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0} e^{\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{\sigma^2}{4a}\left[1-e^{-2at}\right]} \\
&= e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{4a}\left[1-e^{-2at}\right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[r_t] &= Var\left[e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}\right] \\
&= E\left[\left(e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}\right)^2\right] \\
&\qquad - \left(E\left[e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}\right]\right)^2 \\
&= E\left[e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + 2\sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s}\right] \\
&\qquad - \left(e^{e^{-at}\ln r_0 + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{4a}\left[1-e^{-2at}\right]}\right)^2 \\
&= e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2\int_0^t e^{-2a(t-s)}(dW_s)^2} \\
&\qquad - e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{2a}\left[1-e^{-2at}\right]} \\
&= e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{1}{2}\left(4\sigma^2\right)e^{-2at}\frac{1}{2a}\left(e^{2at}-e^{0}\right)} \\
&\qquad - e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{2a}\left[1-e^{-2at}\right]}
\end{aligned}$$

$$= e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{\sigma^2}{a}e^{-2at}\left(e^{2at}-1\right)}$$
$$- e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{2a}[1-e^{-2at}]}$$
$$= e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds} e^{\frac{\sigma^2}{a}[1-e^{-2at}]}$$
$$- e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{2a}[1-e^{-2at}]}$$
$$= e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{a}[1-e^{-2at}]}$$
$$- e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{2a}[1-e^{-2at}]}$$
$$= e^{2e^{-at}\ln r_0 + 2\int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \frac{\sigma^2}{2a}[1-e^{-2at}]} \left(e^{\frac{\sigma^2}{2a}[1-e^{-2at}]} - 1 \right)$$

En $E[r_t]$ y $Var[r_t]$ puede verse que la distribución de la tasa de interés en cualquier momento del tiempo es log-Normal lo cual implica que éstas no se tornan negativas.

3.2.- Modelización de precios de activos financieros

El precio de los activos financieros puede ser modelado a través de un proceso estocástico continuo, el cual es la suma de una parte predecible y una impredecible. Sin embargo, este tipo de modelo no tiene en cuenta los choques profundos del mercado. Si se quisieran incorporar, la estructura de precio de los activos debe contener un tercer componente que modele dichos saltos inesperados.

3.2.1.- Modelo de tendencia y volatilidad constante

Suponga que S_t denota el precio de una acción en el tiempo t. Sí $\mathcal{F}_t$ denota el conjunto de información disponible en el tiempo t, entonces S_t es un proceso continuo que está adaptado a $\mathcal{F}_t$.

$\mathcal{F}_t$, se conoce como filtración, y puede ser interpretada como una estructura de información dinámica. El hecho de que S_t este adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t$, significa que el valor que tome S_t en t depende solamente de la información disponible al tiempo t.

El retorno sobre la acción durante el intervalo de tiempo Δt mide el incremento porcentual en el precio de la acción entre los instantes t y $t + \Delta t$ y está dado por $\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$. Cuando Δt es infinitesimalmente pequeño, se obtiene un retorno instantáneo $\frac{dS_t}{S_t}$. Se supone que éste es la suma de dos componentes:

Una parte predecible μdt y una parte de ruido debido a noticias inesperadas σdW_t.

Sumando estas dos partes se produce

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

Lo cual lleva a la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Los parámetros μ y σ son constantes positivas, los cuales representan la tendencia *(drift)* y la volatilidad, respectivamente, del comportamiento del precio del activo financiero. Esta ecuación fue resuelta en el ejemplo 1 del apartado intitulado "método de variación de parámetros", llegando a la solución:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t},$$

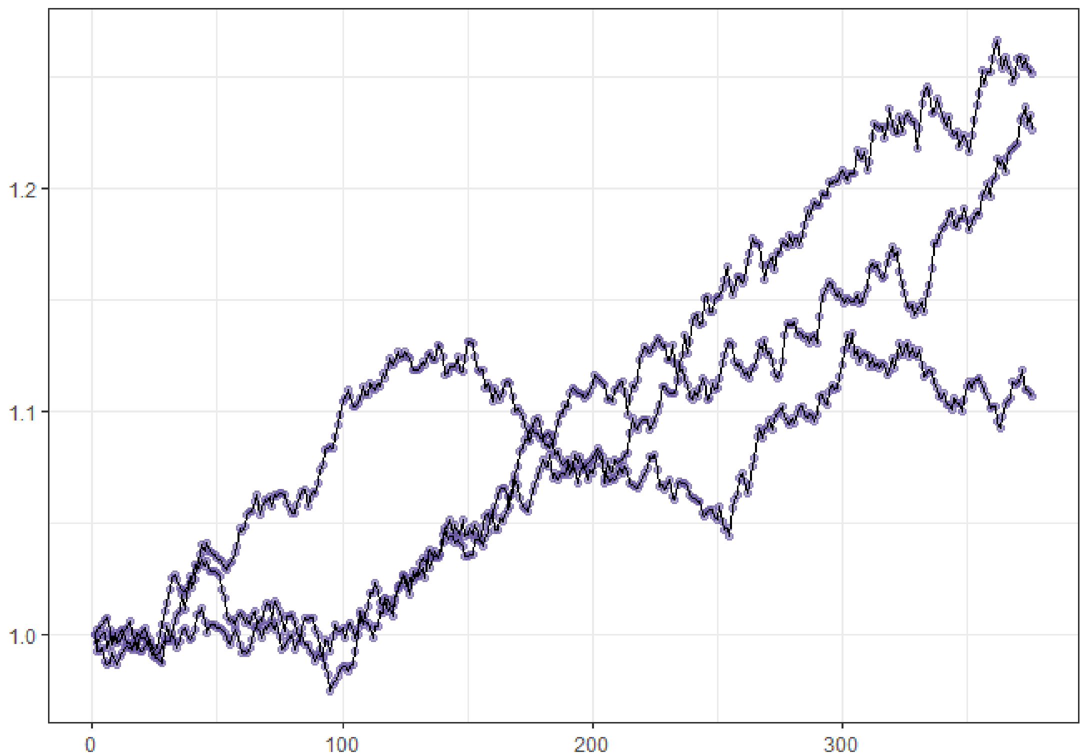

Figura 4: Tres simulaciones distintas para la ecuación estocástica $dS_t = 0.15 S_t dt + 0.07 S_t dW_t$, con $S_0 = 1$.

donde S_0 denota el precio del activo en el tiempo $t = 0$. Vale la pena notar que el precio de los activos en el mercado de valores adaptado a $\mathcal{F}_t$, es positivo, y tiene distribución log-normal.

La distribución de S_t es log-normal. La media y la varianza se convierten en:

$$E[S_t] = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} E[e^{\sigma W_t}] = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2 t}{2}} = S_0 e^{\mu t}.$$

$$Var[S_t] = S_0^2 e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} Var[e^{\sigma W_t}]$$

$$
\begin{aligned}
&= S_0^2 e^{2\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t} e^{\sigma^2 t}\left[e^{\sigma^2 t}-1\right] \\
&= S_0^2 e^{2\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma^2 t}\left[e^{\sigma^2 t}-1\right] \\
&= S_0^2 e^{2\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\frac{\sigma^2 t}{2}\right]}\left[e^{\sigma^2 t}-1\right] \\
&= S_0^2 e^{2\mu t}\left[e^{\sigma^2 t}-1\right].
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1: Suponga que $\mathcal{F}_u$ representa el conjunto de información en el tiempo u. Encontrar $E[S_t|\mathcal{F}_u]$ y $Var[S_t|\mathcal{F}_u]$ para $u \leq t$.

Se tiene

$$
\begin{aligned}
S_t &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t} \\
S_u &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)u+\sigma W_u}
\end{aligned}
$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores entre sí, se llega a

$$
S_t = S_u e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)+\sigma(W_t-W_u)}.
$$

Tomando expectativa en S_t, recordando que está conformado por una parte predecible y otra impredecible, se obtiene

$$
\begin{aligned}
E[S_t|\mathcal{F}_u] &= S_u e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)} E\left[e^{\sigma(W_t-W_u)}|\mathcal{F}_u\right] \\
&= S_u e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)} E\left[e^{\sigma(W_t-W_u)}\right] \\
&= S_u e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)} E\left[e^{\sigma(W_{t-u})}\right] \\
&= S_u e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-u)} \\
&= S_u e^{\mu(t-u)}
\end{aligned}
$$

Se calcula ahora $E[S_t^2|\mathcal{F}_u]$ como insumo para calcular la $Var[S_t|\mathcal{F}_u]$.

$$
\begin{aligned}
E[S_t^2|\mathcal{F}_u] &= S_u^2 e^{2\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)} E\left[e^{2\sigma(W_t-W_u)}|\mathcal{F}_u\right] \\
&= S_u^2 e^{2\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)} e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2(t-u)} \\
&= S_u^2 e^{2\mu(t-u)-\sigma^2(t-u)} e^{2\sigma^2(t-u)} \\
&= S_u^2 e^{2\mu(t-u)} e^{\sigma^2(t-u)}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
Var[S_t|\mathcal{F}_u] &= E[S_t^2|\mathcal{F}_u] - E[S_t|\mathcal{F}_u]^2 \\
&= S_u^2 e^{2\mu(t-u)} e^{\sigma^2(t-u)} - \left(S_u e^{\mu(t-u)}\right)^2 \\
&= S_u^2 e^{2\mu(t-u)} e^{\sigma^2(t-u)} - S_u^2 e^{2\mu(t-u)}
\end{aligned}
$$

$$= S_u^2 e^{2\mu(t-u)}\left[e^{\sigma^2(t-u)} - 1\right]$$

En el caso particular cuando $u = t$, $E[S_t|\mathcal{F}_t] = S_t$ y $Var[S_t|\mathcal{F}_u] = 0$.

Ejercicio 2: Encontrar la ecuación diferencial estocástica asociada con $\ln S_t$ y determinar los valores de $E[\ln S_t]$ y $Var[\ln S_t]$.

Partiendo de $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, cuya solución es $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$, y sea $f(S_t, t) = \ln S_t$. Entonces, utilizando el teorema de Itô

$$df(S_t,t) = \left(\frac{\partial f(S_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(S_t,t)}{\partial S_t} a(S_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S_t,t)}{\partial S_t^2} b^2(S_t,t)\right)dt + \frac{\partial f(S_t,t)}{\partial S_t} b(S_t,t) dW_t$$

donde

$$\frac{\partial f(S_t,t)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f(S_t,t)}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \qquad \frac{\partial^2 f(S_t,t)}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Luego se tiene:

$$\begin{aligned} d\ln S_t &= \left(\frac{1}{S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{S_t^2}\right]\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{1}{S_t}\sigma S_t dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

La correspondiente integral estocástica asociada a $d\ln S_t$ es

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \mu\int_0^t ds - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t (dW_s)^2 + \sigma\int_0^t dW_s \\ &= \ln S_0 + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \\ &= \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\ln S_t$ está normalmente distribuido con $E[\ln S_t] = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ y $Var[\ln S_t] = \sigma^2 t$.

3.2.2.- Probabilidad de que el precio de las acciones alcance una cierta barrera antes que otra barrera

Suponga S_u y S_d fijos, tal que $S_d < S_0 < S_u$. La probabilidad de que el precio de la acción S_t alcance el valor superior S_u antes de alcanzar el valor inferior S_d es

$$p = \frac{d^\gamma - 1}{d^\gamma - u^\gamma},$$

donde $\frac{S_u}{S_0} = u$, $\frac{S_d}{S_0} = d$, y $\gamma = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$.

Demostración: Sea $S_t = mt + W_t$ un movimiento browniano con tasa de tendencia diferente de cero m, y considerando $\alpha, \beta > 0$. Entonces,

$$P(X_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; \alpha \; antes \; de \; llegar \; a \; -\beta) = \frac{e^{2m\beta} - 1}{e^{2m\beta} - e^{-2m\alpha}}.$$

Eligiendo los siguientes valores para los parámetros m, α y β

$$m = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}, \qquad \alpha = \frac{\ln u}{\sigma}, \qquad \beta = -\frac{\ln d}{\sigma},$$

Se tiene también la siguiente secuencia de identidades:

$$\begin{aligned}
&P(X_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; \alpha \; antes \; de \; llegar \; a \; -\beta) \\
&= P(\sigma X_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; \sigma\alpha \; antes \; de \; llegar \; a \; -\sigma\beta) \\
&= P\left(S_0 e^{\sigma X_t} \; llegue \; al \; nivel \; de \; S_0 e^{\sigma\alpha} \; antes \; de \; llegar \; a \; S_0 e^{-\sigma\beta}\right) \\
&= P(S_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; S_u \; antes \; de \; llegar \; a \; S_d).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$P(S_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; S_u \; antes \; de \; llegar \; a \; S_d) = \frac{e^{2m\beta} - 1}{e^{2m\beta} - e^{-2m\alpha}}$$

Reemplazando m, α y β en la ecuación anterior se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2m\beta} - 1}{e^{2m\beta} - e^{-2m\alpha}} &= \frac{e^{2\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\left(-\frac{\ln d}{\sigma}\right)} - 1}{e^{2\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\left(-\frac{\ln d}{\sigma}\right)} - e^{-2\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\left(\frac{\ln u}{\sigma}\right)}} = \frac{e^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma} - \sigma\right)\left(\frac{\ln d}{\sigma}\right)} - 1}{e^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma} - \sigma\right)\left(\frac{\ln d}{\sigma}\right)} - e^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma} - \sigma\right)\left(\frac{\ln u}{\sigma}\right)}} \\
&= \frac{e^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)\ln d} - 1}{e^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)\ln d} - e^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)\ln u}} = \frac{e^{\ln d^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)}} - 1}{e^{\ln d^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)}} - e^{\ln u^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)}}} \\
&= \frac{d^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)} - 1}{d^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)} - u^{-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)}} = \frac{d^{\left(1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}\right)} - 1}{d^{\left(1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}\right)} - u^{\left(1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}\right)}} = \frac{d^\gamma - 1}{d^\gamma - u^\gamma}
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $S_u > S_0 > 0$ fijo. Entonces

$$P(S_t \; alcance \; el \; nivel \; S_u) = \left(\frac{S_0}{S_u}\right)^{1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}} \text{ para algún } t > 0$$

Demostración: tomando $d = 0$ implica $S_d = 0$. Dado que S_t nunca alcanza el valor de cero,

$$P(S_t \; alcance \; el \; nivel \; S_u) = P(S_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; S_u \; antes \; de \; llegar \; a \; S_d = 0)$$

$$= \frac{d^\gamma - 1}{d^\gamma - u^\gamma}\Big|_{d=0}$$
$$= \frac{1}{u^\gamma}$$
$$= \frac{1}{\left[\frac{S_u}{S_0}\right]^{\left(1-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right)}}$$
$$= \left[\frac{S_0}{S_u}\right]^{\left(1-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right)}$$

Ejercicio 1: Si se tiene una acción con $S_0 = \$10$, $\sigma = 0.15$, $\mu = 0.20$. Cuál es la probabilidad que el precio de la acción llegue al nivel de $\$15$ antes de llegar a $\$5$?

$$d = \frac{S_d}{S_0} = \frac{5}{10} = 0.5;$$
$$u = \frac{S_u}{S_0} = 1.5;$$
$$\gamma = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2} = 1 - \frac{2 * 0.20}{0.15^2} = -16.77$$

Luego,

$$P(S_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; \$15 \; antes \; de \; llegar \; a \; \$5) = \frac{d^\gamma - 1}{d^\gamma - u^\gamma}$$

$$P(S_t \; llegue \; al \; nivel \; de \; \$15 \; antes \; de \; llegar \; a \; \$5) = \frac{0.5^{-16.77} - 1}{0.5^{-16.77} - 1.5^{-16.77}} = 0.9999$$

Ejercicio 2: Sea $0 < S_0 < S_u$. Cuál es la probabilidad que S_t alcance S_u para algún tiempo $t > 0$?

$$P(S_t \; alcance \; el \; nivel \; S_u) = \left[\frac{S_0}{S_u}\right]^{\left(1-\frac{2\mu}{\sigma^2}\right)}$$
$$= \left[\frac{10}{15}\right]^{\left(1-\frac{2*0.20}{0.15^2}\right)} = 0.0005$$

3.2.3.- Modelo de tendencia y volatilidad dependiente del tiempo

Este modelo considera la tendencia $\mu = \mu(t)$ y volatilidad $\sigma = \sigma(t)$ como funciones determinísticas del tiempo. En este caso la ecuación es

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma(t) S_t dW_t.$$

Se resuelve la ecuación por el método de factor integrante, éste es:

$$p_t = e^{-\int_0^t \sigma(s)dW_s + \int_0^t \sigma^2(s)ds}$$

Usando la fórmula de Itô:

$$d\rho_t = \left(\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial W_t^2}\right)dt + \frac{\partial \rho_t}{\partial W_t}dW_t$$

Se puede ver que,

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = (\sigma^2(t)dt - \sigma(t)dW_t)p_t$$
$$\frac{\partial \rho_t}{\partial W_t} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \rho_t}{\partial W_t^2} = 0$$

Por tanto,

$$d\rho_t = \sigma^2(t)p_t dt - \sigma(t)p_t dW_t$$

Multiplicando la ecuación anterior por la ecuación $dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t$ se obtiene:

$$dS_t d\rho_t = (\mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t)(\sigma^2(t)p_t dt - \sigma(t)p_t dW_t)$$
$$dS_t d\rho_t = -\sigma^2(t)S_t p_t dt$$

Multiplicando por p_t en la ecuación inicial

$$p_t dS_t = p_t\mu(t)S_t dt + p_t\sigma(t)S_t dW_t$$
$$p_t dS_t - p_t\sigma(t)S_t dW_t = p_t\mu(t)S_t d$$

Sumando y restando $\sigma^2(t)S_t p_t dt$ se produce:

$$p_t dS_t - p_t\sigma(t)S_t dW_t + \sigma^2(t)S_t p_t dt - \sigma^2(t)S_t p_t dt = p_t\mu(t)S_t d$$
$$p_t dS_t + S_t(\sigma^2(t)p_t dt - p_t\sigma(t)dW_t) - \sigma^2(t)S_t p_t dt = p_t\mu(t)S_t d$$
$$p_t dS_t + S_t d\rho_t + dS_t d\rho_t = p_t\mu(t)S_t dt$$
$$d(p_t S_t) = p_t\mu(t)S_t dt$$

Sustituyendo $Y_t = p_t S_t$ se produce la ecuación determinística $d(Y_t) = \mu(t)Y_t dt$ cuya solución es:

$$dM_t = r_t M_t dt$$

$$d(Y_t) - \mu(t)Y_t dt = 0$$

Se multiplica por el factor integrante $e^{-A(t)}$ donde $A(t) = \int_0^t \mu(s)\, ds$.

$$e^{-\int_0^t \mu(s)ds} d(Y_t) - \mu(t) e^{-\int_0^t \mu(s)ds} Y_t dt = 0$$
$$d\left(Y_t e^{-\int_0^t \mu(s)ds}\right) = 0$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene

$$Y_t e^{-\int_0^t \mu(s)ds} = Y_0$$

Dividiendo entre $e^{-\int_0^t r_s ds}$, se produce la solución:

$$Y_t = Y_0 e^{\int_0^t \mu(s)ds}$$

Sustituyendo se llega a la solución de la ecuación diferencial inicial:

$$S_t = p_t^{-1} Y_t$$
$$S_t = e^{\int_0^t \sigma(s)dW_s - \int_0^t \sigma^2(s)ds} Y_0 e^{\int_0^t \mu(s)ds}$$
$$S_t = Y_0 e^{\int_0^t \sigma(s)dW_s - \int_0^t \sigma^2(s)ds + \int_0^t \mu(s)ds}$$
$$S_t = p_0 S_0 e^{\int_0^t \left(\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s}$$
$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \left(\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s}$$

La solución S_t está adaptada a la filtración $\mathcal{F}_t$ y está distribuida de forma log-normal, su media y varianza se calculan de la siguiente manera:

Sea $X_t = \int_0^t \left(\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$. Dado que, X_t es una suma entre una función integral predecible y una integral de Wiener (la cual está distribuida normalmente con media 0 y varianza $\int_a^b f^2(t)dt$); entonces

$$E[X_t] = \int_0^t \left(\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds$$
$$Var[X_t] = Var\left[\int_0^t \sigma(s)dW_s\right] = \int_0^t \sigma^2(s)ds$$

Luego la media y la varianza de una variable aleatoria log-normal $S_t = S_0 e^{X_t}$ está dada por

$$\begin{aligned} E[S_t] &= E[S_0 e^{X_t}] \\ &= S_0 e^{\int_0^t \left(\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds} \\ &= S_0 e^{\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds} \end{aligned}$$

$$Var[S_t] = S_0^2 e^{2\int_0^t \left(\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma^2(s)ds} \left(e^{\int_0^t \sigma^2(s)ds} - 1\right)$$

$$= S_0^2 e^{\int_0^t \left(2\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds} \left(e^{\int_0^t \sigma^2(s)ds} - 1\right)$$
$$= S_0^2 e^{\int_0^t 2\mu(s)ds} - e^{\int_0^t \left(2\mu(s) - \sigma^2(s)\right)ds}$$
$$= S_0^2 e^{2\int_0^t \mu(s)ds} \left(1 - e^{-\int_0^t \sigma^2(s)ds}\right)$$

Sí la tendencia promedio y la volatilidad al cuadrado promedio son definidas como:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{t}\int_0^t \mu(s)ds$$
$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma^2(s)ds$$

Entonces las fórmulas anteriormente mencionadas pueden también ser escritas como:

$$E[S_t] = S_0 e^{\bar{\mu}t - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t}$$
$$Var[S_t] = S_0^2 e^{2\bar{\mu}t}\left(1 - e^{-\bar{\sigma}^2 t}\right)$$

3.2.4.- Modelos de promedios sobre precios de activos financieros

A continuación, se presentan ecuaciones diferenciales estocásticas para varios tipos de promedios sobre precios de activos financieros. Estos modelos son usados, por ejemplo, para obtener el precio de opciones asiáticas, las cuales toman en cuenta el promedio del subyacente. Como se sabe, estas opciones dependen de su trayectoria, es decir, el valor de la opción al vencimiento no solo depende del valor que alcance el activo subyacente al final del contrato, sino también de la evolución que tenga éste durante toda su vida. Los promedios comúnmente utilizados en los contratos de opciones de este tipo son los promedios aritmético y geométrico del subyacente. Existe una extensa variedad de subyacentes en este tipo de contratos: divisas, acciones, tasas de interés, *commodities*, índices, seguros, entre otros.

Las opciones asiáticas, a diferencia de las americanas y las europeas, son útiles cuando se realizan frecuentes transacciones sobre un mismo activo en un tiempo determinado, esto es, resulta más económico comprar una opción asiática que considere n diferentes precios de un mismo activo (a través de un promedio) al vencimiento, que comprar n opciones del mismo activo a diferentes vencimientos, lo que involucraría n diferentes primas, haciéndolo muy costoso, pero en ambas alternativas la cobertura de riesgo es muy similar, por lo cual, ofrecen una manera menos costosa de cubrir el riesgo de mercado.

Una opción con precio de ejercicio promedio es una opción asiática en la que su pago depende de un precio de ejercicio igual al promedio aritmético del precio del subyacente durante la vigencia del contrato.

3.2.4.1.- Promedio aritmético con muestreo continuo

Sea $t_n = t$ y se asume $t_{k+1} - t_k = \frac{t}{n}$. Usando la definición de la integral como un límite de las sumas de Riemann, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_{t_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} S_{t_k} \frac{t}{n} = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du.$$

De ello se deduce que, el promedio aritmético de los precios de activos financieros con muestreo continuo entre 0 y t está dado por

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du$$

Reemplazando S_t con μ y σ constantes, se obtiene

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u} du$$

$$A_t = \frac{S_0}{t} \int_0^t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u} du$$

Esta integral se puede calcular explícitamente solo en el caso $\sigma = 0$. Esto es, no hay soluciones en forma cerrada mediante el enfoque probabilista. Vale la pena señalar que A_t no es ni normal ni log-normal, un hecho que hace que el precio de las opciones asiáticas en promedios aritméticos difíciles de evaluar.

Sea $I_t = \int_0^t S_u du$. El teorema fundamental del cálculo implica $dI_t = S_t dt$. Entonces la regla del cociente produce

$$dA_t = d\left(\frac{I_t}{t}\right) = \frac{dI_t t - I_t dt}{t^2} = \frac{tS_t dt - I_t dt}{t^2} = \frac{1}{t}\left(S_t - \frac{I_t}{t}\right) dt = \frac{1}{t}(S_t - A_t)dt,$$

Es decir, el promedio aritmético continuo A_t satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dA_t = \frac{1}{t}(S_t - A_t)dt$$

Sí $A_t < S_t$, el lado derecho es positivo y, por lo tanto, $dA_t > 0$, esto es, el promedio A_t crece. En el caso contrario, sí $A_t > S_t$, entonces el promedio A_t decrece. Este muestra que el promedio A_t tiende a rastrear/seguir el valor de la acción S_t.

Por la regla de L'Hôpital se tiene:

$$A_0 = \lim_{t\to 0} \frac{I_t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I_t'}{t'} = \lim_{t\to 0} S_t = S_0$$

Usando que la expectativa conmuta con integrales, se consigue

$$E[A_t] = E\left[\frac{1}{t}\int_0^t S_u du\right] = \frac{1}{t}\int_0^t E[S_u]du = \frac{1}{t}\int_0^t S_0 e^{\mu u}du = \frac{S_0}{t}\frac{1}{\mu}(e^{\mu t} - e^0) = \frac{S_0}{\mu t}(e^{\mu t} - 1)$$

Por tanto,

$$E[A_t] = \begin{cases} \dfrac{S_0}{\mu t}(e^{\mu t} - 1), & si\ t > 0 \\ S_0, & si\ t = 0 \end{cases}$$

$$Var[A_t] = E[A_t^2] - E[A_t]^2 = \frac{1}{t^2}\ E[I_t^2] - E[A_t]^2$$

Se debe encontrar una fórmula para $E[I_t^2]$

Partiendo de,

$$d[I_tS_t] = I_t\ dS_t + S_t dI_t + dS_t dI_t$$
$$d[I_tS_t] = I_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + S_t S_t dt + \underbrace{(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)(S_t dt)}_{=0}$$
$$d[I_tS_t] = \mu I_t S_t dt + \sigma I_t S_t dW_t + S_t^2 dt$$
$$d[I_tS_t] = (S_t^2 + \mu I_t S_t)dt + \sigma I_t S_t dW_t$$

Usando $I_0 S_0 = 0$, e integrando entre 0 y t se produce

$$I_t S_t = \int_0^t (S_u^2 + \mu I_u S_u)du + \sigma\int_0^t I_u S_u dW_u$$

Tomando expectativa y dado que la expectativa de la integral de Itô es cero, se tiene

$$E[I_tS_t] = \int_0^t (E[S_u^2] + \mu E[I_u S_u])du$$
$$E[I_tS_t] = \int_0^t \left(S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)u} + \mu E[I_u S_u]\right)du$$

Sí se denota $g(t) = E[I_t S_t]$, diferenciando se produce la ODE

$$g'(t) = S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t} + \mu E[I_t S_t]$$
$$g'(t) = S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t} + \mu g(t),$$

con la condición inicial $g(0) = 0$. Esta puede ser resuelta como una ecuación diferencial lineal en $g(t)$ y multiplicando por el factor integrante $e^{-\mu t}$. La solución es

$$e^{-\mu t}g'(t) = e^{-\mu t}S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t} + e^{-\mu t}\mu g(t)$$

$$e^{-\mu t}g'(t) - e^{-\mu t}\mu g(t) = e^{-\mu t}S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t}$$

$$d[e^{-\mu t}g(t)] = S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t-\mu t}$$

$$d[e^{-\mu t}g(t)] = S_0^2 e^{(\mu+\sigma^2)t}$$

Usando $g_0 = 0$, e integrando entre 0 y t se produce

$$e^{-\mu t}g(t) = g_0 + S_0^2 \int_0^t e^{(\mu+\sigma^2)u} du$$

$$e^{-\mu t}g(t) = \frac{S_0^2}{\mu + \sigma^2}\left[e^{(\mu+\sigma^2)t} - 1\right]$$

$$g(t) = \frac{S_0^2}{(\mu + \sigma^2)} e^{\mu t}\left[e^{(\mu+\sigma^2)t} - 1\right]$$

$$g(t) = \frac{S_0^2}{(\mu + \sigma^2)} e^{\mu t}\left[e^{(2\mu+\sigma^2)t} - e^{\mu t}\right]$$

También se sabe que, I_t y S_t no son independientes, esto es,

$$E[I_t S_t] \neq E[I_t]E[S_t]$$

$$\begin{aligned} E[I_t]E[S_t] &= E\left[\int_0^t S_u du\right] E\left[S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}\right] \\ &= \left[\int_0^t E[S_u] du\right] S_0 e^{\mu t} \\ &= \left[\int_0^t S_0 e^{\mu u} du\right] S_0 e^{\mu t} \\ &= \frac{S_0}{\mu}(e^{\mu t} - 1) S_0 e^{\mu t} \\ &= \frac{S_0^2}{\mu}(e^{\mu t} - 1) e^{\mu t} \end{aligned}$$

Ahora se encontrará $E[I_t^2]$. Usando $dI_t = S_t dt$, entonces $(dI_t)^2 = 0$ y, por lo tanto, la fórmula de Itô produce:

$$\begin{aligned} d(I_t^2) &= I_t dI_t + I_t dI_t + dI_t dI_t \\ d(I_t^2) &= 2I_t dI_t + (dI_t)^2 \\ d(I_t^2) &= 2I_t S_t dt \end{aligned}$$

Integrando entre 0 y t y usando $I_0 = 0$, se llega a

$$I_t^2 = 2\int_0^t I_u S_u du$$

Tomando expectativas

$$E[I_t^2] = 2\int_0^t E[I_u S_u]du$$
$$E[I_t^2] = 2\int_0^t \frac{S_0^2}{(\mu+\sigma^2)}\left[e^{(2\mu+\sigma^2)u} - e^{\mu u}\right]du$$
$$E[I_t^2] = \frac{2S_0^2}{(\mu+\sigma^2)}\int_0^t \left[e^{(2\mu+\sigma^2)u} - e^{\mu u}\right]du$$
$$E[I_t^2] = \frac{2S_0^2}{(\mu+\sigma^2)}\left[\int_0^t e^{(2\mu+\sigma^2)u}du - \int_0^t e^{\mu u}du\right]$$
$$E[I_t^2] = \frac{2S_0^2}{(\mu+\sigma^2)}\left[\frac{e^{(2\mu+\sigma^2)t}-1}{2\mu+\sigma^2} - \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}\right]$$

Por tanto, sustituyendo en $Var[A_t] = \frac{1}{t^2}\ E[I_t^2] - E[A_t]^2$, se llega a:

$$Var[A_t] = \frac{1}{t^2}\ \frac{2S_0^2}{(\mu+\sigma^2)}\left[\frac{e^{(2\mu+\sigma^2)t}-1}{2\mu+\sigma^2} - \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}\right] - \frac{S_0^2}{\mu^2 t^2}(e^{\mu t}-1)^2$$
$$= \frac{S_0^2}{t^2}\left(\frac{2}{\mu+\sigma^2}\left[\frac{e^{(2\mu+\sigma^2)t}-1}{2\mu+\sigma^2} - \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}\right] - \frac{(e^{\mu t}-1)^2}{\mu^2}\right).$$

3.2.4.2.- Promedio geométrico con muestreo continuo

Dividiendo el intervalo $(0, t)$ en subintervalos iguales de longitud $t_{k+1} - t_k = \frac{t}{n}$, se obtiene:

$$G(t_1, \dots, t_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} S_{t_k}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} S_{t_k}\right)^{\frac{1}{n}}}$$
$$= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln S_{t_k}} = e^{\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\ln S_{t_k}\frac{t}{n}}$$

Usando la definición de la integral como un límite de las sumas de Riemann, se tiene:

$$G_t = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} S_{t_k}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\ln S_{t_k}\frac{t}{n}} = e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u du}.$$

De ello se deduce que, el promedio geométrico con muestreo continuo de los precios de activos financieros entre 0 y t está dado por

$$G_t = e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u du}.$$

Reemplazando S_t con μ y σ constantes, se obtiene

$$\begin{aligned} G_t &= e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)u+\sigma W_u} du} \\ &= e^{\frac{1}{t}\int_0^t \left(\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)u+\sigma W_u\right)du} \\ &= e^{\frac{1}{t}\left[\int_0^t \ln S_0 du+\int_0^t\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)u du+\int_0^t \sigma W_u du\right]} \\ &= e^{\frac{1}{t}\left[\ln S_0 \int_0^t du+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^t u du+\sigma \int_0^t W_u du\right]} \\ &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{2}+\frac{\sigma}{t}\int_0^t W_u du}. \end{aligned}$$

Su media y varianza se calculan de la siguiente manera:

Tomando logaritmo se produce:

$$\ln G_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{2} + \frac{\sigma}{t}\int_0^t W_u du$$

Donde $\int_0^t W_u\, du = Z_t$ es el proceso de Wiener integrado; el cual es gaussiano con $Z_t \sim N\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$, luego $\ln G_t$ tiene una distribución normal.

$$\ln G_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{2}, \frac{\sigma^2 t}{3}\right).$$

Esto implica que, G_t tiene una distribución log-normal.

Una importante consecuencia del hecho que G_t es log-normal es que el promedio geométrico sobre opciones asiáticas tiene solución de forma cerrada.

Tomando el hecho que la función generadora de momento de una variable aleatoria distribuida normalmente $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ es $m(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$, equivalente a, $E[Y^n] = e^{\mu n+\frac{n^2\sigma^2}{2}}$ donde $Y = e^X$. La media y varianza de Y, variable aleatoria con distribución log-normal, y con $n = 1$, es: $E[Y] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ y $Var[Y] = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

Entonces, sea $X = \ln G_t$, luego $Y = G_t$, se obtiene:

$$\begin{aligned} E[G_t] &= e^{E[\ln G_t]+\frac{1}{2}Var[\ln G_t]} \\ &= e^{\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2 t}{3}\right)} \\ &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\left(\frac{\sigma^2}{3}\right)} \\ &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var[G_t] &= e^{2E[\ln G_t]+Var[\ln G_t]}\left(e^{Var[\ln G_t]}-1\right)\\
&= e^{2\left[\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{2}+\left(\frac{\sigma^2 t}{3}\right)\right]}\left(e^{\left(\frac{\sigma^2 t}{3}\right)}-1\right)\\
&= S_0^2 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\left(\frac{\sigma^2}{3}\right)t}\left(e^{\left(\frac{\sigma^2 t}{3}\right)}-1\right)\\
&= S_0^2 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{6}\right)t}\left(e^{\left(\frac{\sigma^2 t}{3}\right)}-1\right).
\end{aligned}
$$

3.3.- Caso práctico

Modelación de la tasa corta de interés (spot) del mercado colombiano, conocida como Tasa Interbancaria -TIB, a partir de los modelos de Vasicek y Cox Ingersoll Ross. A continuación, se representa la TIB de forma gráfica.

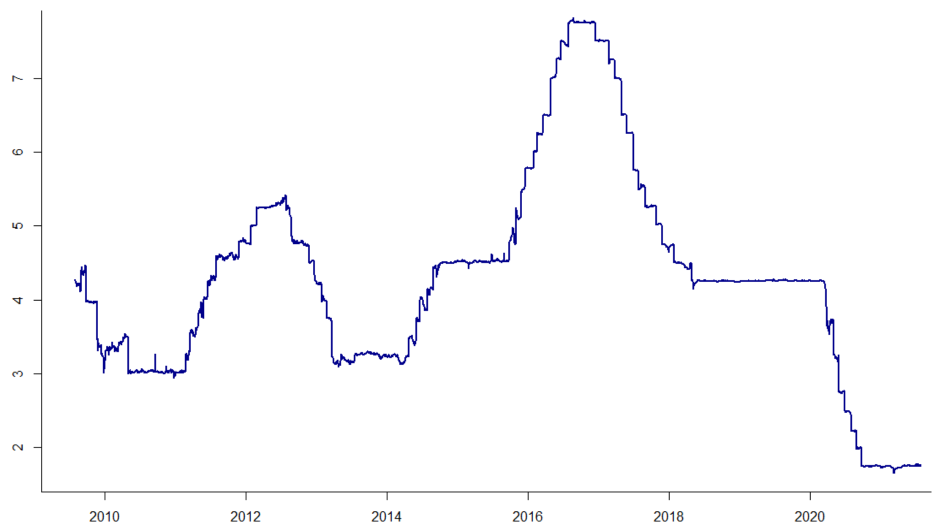

Figura 4: Serie TIB de tipos de interés spot que contiene 2.914 observaciones desde el 3 de agosto de 2009 hasta el 30 de julio de 2021.

En la figura 4, se percibe que la serie parece que salta por momentos, lo cual se puede deber a las intervenciones del Banco Central en su función como directo responsable de la política monetaria. También se evidencia que la volatilidad del tipo de interés TIB varia con intensidad, por ejemplo, si se comparan los periodos 2011-2012, 2016-2017, con los periodos 2013, 2015, 2018-2019, se podría interpretar como el fenómeno de *clustering* de volatilidad: tiempos con volatilidades altas son seguidos por volatilidades altas, y viceversa, a tiempos de baja volatilidad le siguen bajas volatilidades.

La muestra de datos que se usa es una serie financiera correspondiente a la Tasa Interbancaria a un día en Colombia denominada TIB, que hace referencia a la tasa de interés a la cual los intermediarios financieros[2] se prestan fondos entre sí a un día (préstamos overnight). Los préstamos entre las entidades no son colateralizados[3] por lo que la tasa refleja el riesgo crediticio asociado con las contrapartes involucradas en las operaciones. Adicionalmente, es importante mencionar que, la TIB es calculada por el Banco de la República como el promedio ponderado por monto de los préstamos interbancarios y, que el nivel de esta tasa refleja en cierto grado, las condiciones de liquidez en el mercado monetario local.

3.3.1.- Aplicación modelo de tasa corta de Vasicek

Vale recordar que, el supuesto del modelo de Vasicek es que la tasa de interés de corto plazo debe satisfacer la ecuación diferencial estocástica de reversión a la media:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

equivalente a la ecuación,

$$dr_t = (\theta_1 - \theta_2 r_t)dt + \theta_3 dW_t,$$

donde $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3\ \in \mathbb{R}^+$ y donde $X_0 = x_0 > 0$.

En finanzas, la reversión a la media describe un fenómeno en la que los rendimientos pueden ser muy inestables en el corto plazo, pero muy estables en el largo plazo. Los parámetros b, a y σ se interpretan como la tasa de largo plazo, la velocidad de reversión a la tasa de largo plazo y la volatilidad de la varianza de la tasa de interés, respectivamente.

El objetivo es obtener la solución de la anterior ecuación diferencial estocástica, que es del tipo,

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

equivalente a,

$$r_t = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(r_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 \int_0^t e^{-\theta_2(t-s)} dW_s.$$

Resulta fácil ver que la relación entre estas ecuaciones es, $b = \frac{\theta_1}{\theta_2},\ a = \theta_2$ y $\sigma = \theta_3$.

---

[2] Establecimientos bancarios, compañías de financiamiento comercial, corporaciones financieras, y otros.

[3] No se requieren de garantías.

Para ello, es necesario estimar el valor de los parámetros $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3$ que la componen. El comportamiento de r_t puede ser cóncavo, convexo, entre otros, también puede ser negativa para alguno de los valores de los parámetros.

Existen diferentes métodos de estimación de los parámetros teóricos, ya sea directa, como el método de inferencia por máxima verosimilitud, o indirectamente, como el de Euler.

Por el método de máxima verosimilitud, se asume: condición de crecimiento lineal, condición global de Lipschitz, positividad del coeficiente de difusión, la existencia de los momentos hasta un orden determinado, así como cualquier otra condición necesaria para garantizar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial estocástica anterior. Condiciones suficientes para la consistencia y normalidad asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud.

Es importante notar que, no se está en un caso de tiempo continuo, por tanto, la función de verosimilitud de X en tiempo discreto y condicionada a X_0 es

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta\,(\Delta, X_i | X_{i-1}) p_\theta(X_0),$$

donde $p_\theta(X_0) = 1$, pues el peso relativo de ésta en la verosimilitud disminuye a medida que n aumenta. Sí se desea la log-verosimilitud, entonces se tendría que

$$log\ L_n(\theta) \propto \prod_{i=1}^{n} log\ p_\theta\,(\Delta, X_i | X_{i-1}).$$

Vale recordar que si el parámetro θ_2 es estrictamente positivo, el proceso de Vasicek es ergódico[4] y posee una densidad estacionaria explícita con su media $\mathbb{E}_\theta(X_t|X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t},$ y su varianza condicional $Var_\theta(X_t|X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2\left(1-e^{-2\theta_2 t}\right)}{2\theta_2}$.

Los datos TIB que se analizan corresponden a 222 valores de tipos de interés efectivos anuales periodicidad diaria, desde el 1 de septiembre de 2020 hasta el 30 de julio de 2021.

Los resultados obtenidos son estimadores $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3$ que presentan errores estándar bajos, menores al 0.33%. Además, $\theta_3 > 0$ y $\theta_2 > 0$, de lo cual se infiere que el proceso es ergódico con densidad condicional de distribución Gaussiana.

Para la obtención de los estimadores de los parámetros por máxima verosimilitud, se aplicó el siguiente código usando la muestra de datos TIB.

[4] Se dice que un proceso es ergódico si sus promedios estadísticos coinciden con los temporales, entonces sólo se necesita una realización del proceso para conocer los promedios estadísticos de éste.

```r
#########################
# Con los datos de TIB #
#########################
require(stats4)
require(sde)
#--- Densidad condicional ---#
dcOU=function(x,t,x0,theta,log=FALSE){
  mc <- theta[1]/theta[2]+(x0-theta[1]/theta[2])*exp(-theta[2]*t)
  dc <- sqrt(theta[3]^2*(1-exp(-2*theta[2]*t))/(2*theta[2]))
  dnorm(x, mean = mc, sd = dc, log=log)
}
#--- Función de Verosimilitud ---#
OU.lik=function(theta1,theta2,theta3){
  n=length(X)
  dt=deltat(X)
  -sum(dcOU(x=X[2:n],t=dt,x0=X[1:(n-1)],theta=c(theta1,theta2,theta3),log=TRUE))
}
TIB<-t(TIB_Serie_historica)
X <- TIB[1:222]
#--- Estimación de los parámetros por Máxima Verosimilitud ---#
fit_tot_OU <- mle(OU.lik,start=list(theta1=0.01,theta2=0.01,theta3=0.01),
                  method="L-BFGS-B",lower=c(0.001,0.001,0.001),upper=c(1,1,1))
#--- Informe del ajuste (estimaciones y errores típicos) ---#
summary(fit_tot_OU)

#Coefficients:
#        Estimate   Std. Error
#theta1 0.02741928 0.0325252351
#theta2 0.01495103 0.0183792548
#theta3 0.01900922 0.0009119344

#-2 log L: -1128.542
```

Esto es, la solución explicita única a la ecuación $dr_t = (\theta_1 - \theta_2 r_t)dt + \theta_3 dW_t$ es:

$$r_t = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(r_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 \int_0^t e^{-\theta_2(t-s)} dW_s$$

$$r_t = 1.8339 + (r_0 - 1.8339)e^{-0.0149t} + 0.0190 \int_0^t e^{-0.0149(t-s)} dW_s.$$

3.3.2.- Aplicación modelo de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross

La heterocedasticidad y la regresión a la media son propiedades de los tipos de interés; a medida que los tipos de interés suben por encima del nivel de la media, hay un drift que hala los tipos hacia abajo, y viceversa, cuando caen por debajo de la media, el drift hala los tipos hacia arriba. Para capturar estas dos características relevantes de las tasa de interés, Cox, Ingersoll y Ross construyen un modelo.

Este modelo se desprende del modelo de Vasicek, donde se restringe que los tipos de interés solo puedan tomar valores positivos, o al menos no negativos, dependiendo del cumplimiento o no de ciertas condiciones paramétricas que se mencionan más adelante. El modelo CIR asume que la tasa spot verifica la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \underbrace{a\,(b - r_t)}_{drift\ lineal}\,dt \;+\; \underbrace{\sigma\sqrt{r_t}}_{Heteroce\ldots}\;dW_t,$$

equivalente a la ecuación,

$$dr_t = (\theta_1 - \theta_2 r_t)dt + \theta_3 r_t^{\frac{1}{2}} dW_t,$$

en el cual, si $2\theta_1 > \theta_3^2$, entonces r_t toma valores en $(0, +inf)$, y si $2\theta_1 < \theta_3^2$ entonces r_t toma valores en $[0, +inf)$, es decir, el proceso es no negativo. Con $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3$ constantes.

Los datos TIB que se analizan corresponden a 222 valores de tipos de interés efectivos anuales periodicidad diaria, desde el 1 de septiembre de 2020 hasta el 30 de julio de 2021.

En la obtención de los estimadores de los parámetros por máxima verosimilitud, la aproximación tiende a explosionar; una posible razón, es que la densidad de transición de un proceso CIR sigue una distribución Chi cuadrado que, aunque sea una distribución de probabilidad muy conocida, no deja de ser computacionalmente difícil.

A pesar de las dificultades anteriores, las estimaciones de los parámetros $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3$, se pueden obtener explícitamente, a través de las ecuaciones formuladas por Bibby, Jacobsen & Sorensens (2005):

Para el calculo exacto de $\hat{k}_n,\ \hat{\theta}_n$ y $\hat{\sigma}_n^2,$ estimadores de $k_n,\ \theta_n$ y σ_n, parámetros de la ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^{\frac{1}{2}} dW_t,$$

donde $k, \theta \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^+$ es constante; se recurre a las siguientes ecuaciones,

$$\hat{k}_n = -\ln\left[\frac{\frac{1}{(n-1)}\left(\sum_{i=2}^n r_{i-1}\right)\left(\sum_{i=2}^n r_i\right) - \sum_{i=2}^n r_{i-1} r_i}{\frac{1}{(n-1)}\left(\sum_{i=2}^n r_{i-1}\right)^2 - \sum_{i=2}^n (r_{i-1})^2}\right],$$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\left(1 - e^{-\hat{k}_n}\right)}\left[\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=2}^n r_i - \frac{e^{-\hat{k}_n}}{(n-1)}\sum_{i=2}^n r_{i-1}\right],$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{2\hat{k}_n}{\left(1 - e^{-2\hat{k}_n}\right)}\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=2}^n \left(r_i - r_{i-1} e^{-\hat{\theta}_n} - \hat{\theta}_n\left(1 - e^{-\hat{k}_n}\right)\right)^2$$

Incluidas en el siguiente código usando la muestra de datos TIB.

```
########################
# Con los datos de TIB #
########################
### --- Estimadores $\hat{theta_1}$, $\hat{theta_2}$ y $\hat{theta_3}$ ---###
### --- $\hat{k}$
TI <- TIB[1:222]
n = length(TI)
s1 = 0
for (i in 2:n){
  s1 = s1 + TI[i-1]
}
s2 = 0
for(i in 2:n){
  s2 = s2 + TI[i]
}
s3 = 0
for(i in 2:n){
  s3 = s3 + TI[i-1]*TI[i]
}
s4 = 0
for(i in 2:n){
s4 = s4 + TI[i-1]^2
}
khathat <- -log((((1/(n-1))*(s1*s2))-s3)/(((1/(n-1))*(s1)^2)-s4))
###--- $\hat{\theta}$ ---###
thetahat <- (1/(1-exp(-khathat)))*(((1/(n-1))*s2)-((exp(-khat)/(n-1))*s1))
### --- $\hat{sigma}$ ---###
s5=0
for(i in 2:n){
  s5 = s5 + ((TI[i]-(TI[i-1]*exp(-thetahat))-thetahat*(1-exp(-khat)))^2)
}
sigmahat <-sqrt((((2*khat)/(1-exp(-2*khathat)))*(1/(n-1)))*s5)
### --- Reparametrización ---###
theta_1hat <- khathat*thetahat
theta_2hat <- khathat
theta_3hat <- sigmahat
theta_hat <- c(theta_1hat, theta_2hat, theta_3hat)
theta_hat
[1] 0.02815926 0.01460968 1.53281175
```

Los resultados obtenidos son estimadores $\theta_1,\ \theta_2, \theta_3$ positivos tal que $2\theta_1 > \theta_3^2$, de lo cual se infiere que r_t toma valores en $(0, +inf)$. La ecuación diferencial estocástica asociada queda:

$$dr_t = (0.0281 - 0.0146r_t)dt + 1.5328r_t^{\frac{1}{2}}dW_t,$$

Y su solución, $r_t = r_0 + \theta_1 t - \theta_2 \int_0^t r_s ds + \theta_3 \int_0^t \sqrt{r_s} dW_s$, con $r_0 = 1.9853$, queda:

$$r_t = 1.9853 + 0.0281t - 0.0146 \int_0^t r_s ds + 1.5328 \int_0^t \sqrt{r_s} dW_s$$

Bibliografía

Bibby, B. M., Jacobsen, M. and Sørensen, M. (2005). Estimating functions for discretely sampled diffusion-type models. In Handbook of Financial Econometrics (Y. Aït-Sahalia and L. P. Hansen, eds.). North-Holland, Amsterdam.

Calin Ovidiu (2012). An Introduction to Stochastic Calculus with Applications to Finance. Eastern Michigan University.

Casas Fernández, Raúl J. (2019). Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Aplicadas a las Finanzas. Trabajo Fin de Máster en Técnicas Estadísticas.

Khan, Guan and Poon (2008). Short Rate Models: Hull-White or Black-Karasinski? Implementation Note and Model Comparison for ALM, Manchester Business School Working Paper, Number 562, in: http://www.mbs.ac.uk/research/workingpapers.

León Nieto, D. I. (2017). El Proceso Estocástico de Feller y el Modelo Cox-Ingersoll-Ross: Modelación de Tasas de Interés y Valoración de Bonos. ODEON, 13, pp. 31-44. DOI: https://doi.org/10.18601/17941113.n13.03

Ludwig Arnold (1973). Stochastic Differential Equations: Theory and Applications.

Ortiz Ramírez, Ambrosio y Martínez Palacios María Teresa. (2016). Valuación de Opciones Asiáticas versus Opciones Europeas con Tasa de Interés Estocástica. Revista Contaduría y Administración 61 (2016) 629-648. Universidad Autónoma de México. Disponible en www.sciencedirect.com.

Restrepo Tobón, Diego A. y Botero Ramírez, Juan C. (2008). Modelos Unifactoriales de Tipos de Interés: Aplicación al Mercado Colombiano. Cuadernos de Administración. Bogotá (Colombia), 21 (36): 133-165, Especial de Finanzas.

Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F. Material de Estudio del curso de Cálculo y Modelación Estocástica de la Maestría en Estadística Aplicada de la Universidad de Granada.

Tamarit Ramos, Salvador. (2013). El Modelo Estocástico de Vasicek para la Predicción de Tipos de Interés. Aplicación al Tipo Interbancario EONIA. Trabajo Fin de Máster en Dirección Financiera y Fiscal. Universidad Politécnica de Valencia.

Vasicek, Oldrich Alfons y Venegas-Martínez, Francisco. (2021). Modelos de la Estructura de Plazos de las Tasas de Interés: Revisión, Tendencias y Perspectivas. Revista Mexicana de Economía y Finanzas, Nueva Época. Volumen 16, Número 2, p.p. 1-28, e587. DOI: https://doi.org/10.21919/remef.v16i2.587.

Velázquez-Gaviria, Daniel (2019). Introducción a los Procesos Estocásticos Aplicados a Finanzas en R. Instituto Tecnológico Metropolitano -ITM.

Venegas-Martínez, Francisco. (2011). Riesgos Financieros y Económicos. Productos Derivados y Decisiones Económicas bajo Incertidumbre, 2da edición.