



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

**MÁSTER EN ESTADÍSTICA APLICADA**

---

REVISIÓN DE TÉCNICAS DE ANÁLISIS  
DEMOGRÁFICO Y APLICACIÓN A DATOS REALES

**PROYECCIONES DE POBLACIÓN**

---

Presentado por: Marcos Díaz Gómez

Tutores: Silvia González Aguilera y Francisco Javier Esquivel Sánchez

JUNIO 2022



# Índice general

Resumen.....	4
Introducción.....	6
1. Conceptos básicos y características de las proyecciones de población.....	8
1.1. Objetivos generales de las proyecciones de población.....	10
1.2. Clasificación de las proyecciones.....	11
1.3. Fuentes de datos.....	12
2. Métodos para calcular proyecciones de población .....	13
2.1. Modelos matemáticos.....	13
2.1.1. Ajuste de los modelos Logístico y Gompertz.....	15
Caso práctico: Ajuste de los modelos logístico y de Gompertz.....	16
2.1.2. Ajuste de datos mediante una función logística.....	19
Caso práctico: Ajuste mediante función logística.....	21
2.2. Modelos demográficos.....	25
2.2.1. Proyecciones por edad: método de los componentes.....	26
2.2.2. Proyecciones por edad: método de cambio de cohorte.....	31
Caso práctico: Ajuste mediante el método de cambio de cohorte.....	34
2.3. Modelos socioeconómicos.....	37
Caso práctico: Ajuste mediante método de la tasa de participación.....	39
Caso práctico: Ajuste mediante método de progresión de cohorte.....	40

3. Las proyecciones de población realizadas por el INE .....	43
3.1. Método general de cálculo.....	45
3.2. Formulación del modelo.....	46
3.3. Proyección de la fecundidad en España .....	50
3.4. Proyección de la mortalidad en España .....	53
3.5. Proyección de la inmigración y emigración exterior .....	54
3.6. Proyección de la migración interior.....	56
Bibliografía y fuentes.....	58

# Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio detallado sobre las proyecciones de población, así como la simulación de varios casos prácticos utilizando algunos de los métodos más destacados y estudiados en este campo. El trabajo se estructura en tres apartados claramente diferenciados.

El primer apartado introduce de forma general algunos conceptos básicos y definiciones de este ámbito, diferenciando en primer lugar entre estimación, proyección y pronóstico. También se analizan como los avances informáticos de hoy en día permiten estudiar posibles escenarios futuros modificando ciertas condiciones iniciales. Además, se estudian los objetivos generales que persiguen las proyecciones de población, así como los distintos tipos que nos podemos encontrar (proyecciones a corto, medio y largo plazo) dependiendo del horizonte temporal que abarquen. Cerrando este bloque se muestran los cuatro tipos de proyecciones que existen según el grado de desagregación y las principales fuentes de datos que se utilizan para su elaboración.

El segundo apartado se dedica íntegramente al cálculo de proyecciones con datos reales, aplicando algunos de los principales métodos empleados en la actualidad. Se estudian los modelos matemáticos como son el ajuste Logístico y Gompertz, con los que se ha realizado una proyección de la población total de España tanto futura (año 2030) como pasada (año 1960). Por otro lado, se utilizan modelos demográficos, analizando en detalle el método de componentes de cohorte (técnica más utilizada para proyectar poblaciones por edad y sexo). También se analiza e ilustra el método de cambio de cohorte, a menudo denominado método de Hamilton-Perry, que requiere menos datos y se ha aplicado a un caso real proyectando la población total de Andalucía tanto para 2026 como para 2031. El último modelo estudiado en este apartado es el socioeconómico, donde se realiza por un lado un ajuste mediante el método de la tasa de participación para el personal ocupado en Andalucía (para 2026 y 2031) y, por otro lado, un ajuste mediante el método de progresión de cohorte para proyectar las matrículas tanto en primaria como secundaria para los próximos dos cursos académicos en España.

El tercer y último apartado que cierra el trabajo se dedica exclusivamente a analizar las proyecciones de población que realiza el Instituto Nacional de Estadística (I.N.E) en España. Veremos como el modelo general de cálculo que utiliza es el método clásico de componentes visto en el segundo apartado, partiendo de la población residente en un cierto ámbito geográfico y de los datos observados para cada uno de los componentes demográficos básicos. Por otro lado, se analiza la formulación del modelo y se estudia con detalle los métodos para realizar la proyección de la fecundidad, mortalidad, inmigración-emigración exterior y migración interior en España que sirve como hoja de ruta para establecer los distintos escenarios futuros a los que se enfrenta el país.

# Introducción

Es cada vez más habitual que tanto la administración pública como las empresas privadas se preocupen por la formulación y ejecución de programas económicos y sociales, con miras a propiciar una utilización más racional de los recursos naturales y humanos, buscando satisfacer las crecientes, variadas y cambiantes demandas de bienes y servicios requeridos por la población. Para ello, las proyecciones de población son herramientas que pueden mostrar las consecuencias que a corto, medio y largo plazo puedan provocar ciertas tendencias demográficas que se consideran plausibles, teniendo en cuenta la experiencia histórica del pasado inmediato. El hecho de que se proponga la elaboración de dos o más escenarios (por ejemplo, respecto a la fecundidad) tiene como finalidad acotar los resultados de lo que sería el futuro de esa población, dentro de ciertos márgenes de razonable posibilidad de cumplimiento.

La amplia gama de resultados que de ellas se derivan permiten establecer las consecuencias del crecimiento de la población sobre diversos sectores sociales y económicos. Basta señalar que las necesidades en materia de educación (demanda de matrículas, formación de maestros, construcción de aulas), salud (demanda de servicios, formación de recursos médicos especializados, construcción de centros de salud), vivienda (volumen e infraestructura), empleo, seguridad social, etc., pueden ser predeterminadas con la ayuda de esa información.

El principal problema de las proyecciones es que suelen extraerse conclusiones de ellas sin tener en cuenta que, de la misma manera que cambian los volúmenes de cada sexo y edad, también cambian las demás condiciones y significaciones de tales parámetros. Eventos aleatorios como la reciente pandemia sufrida, puede alterar las estimaciones realizadas ya que, en este caso particular, aumentó considerablemente la tasa de mortalidad, evento que no estaba reflejado en ninguna estimación.

Ante estas perspectivas debe hacerse una observación general: los fenómenos demográficos tienen una cierta estabilidad o inercia en el tiempo, se transforman lenta y gradualmente, y en comparación con otros fenómenos sociales y económicos, presentan menos incertidumbre, al menos a corto y a medio plazo.

Sin embargo, un evento que también ocurre para fenómenos poco dinámicos, cualquier pequeño error de rumbo (si se mantiene por un tiempo suficiente), provoca enormes errores en las previsiones. Ello obliga a que las proyecciones deban ser revisadas periódicamente.

El margen de error de las proyecciones varía en relación inversa a la magnitud de su ámbito territorial, es decir, las proyecciones a nivel nacional son siempre más fiables que las de nivel regional, mientras que las proyecciones a nivel local rozan la apuesta, lo que obliga a utilizar en cada caso la metodología más adecuada. Ello es fundamentalmente debido al muy distinto peso relativo que tiene, según el ámbito, el factor migratorio y, además, a la dificultad que conlleva la construcción de indicadores demográficos significativos en áreas territoriales a las que, por su tamaño, no se adecúan las estadísticas actualmente disponibles.

En cuanto a la dimensión temporal, la incertidumbre aumenta en relación directa al plazo para el cual queramos conseguir resultados. Un plazo medio y razonable son quince años, periodo en el cual todavía no se han incorporado a tener niños las mujeres nacidas durante el periodo de proyección.

Los resultados de las proyecciones entrañan, por tanto, cierto grado de incertidumbre que aumenta a largo plazo y aún más con la desagregación de las variables consideradas. De ahí la importancia de la preparación de diversos "escenarios", resultados de la combinación de hipótesis de comportamiento para cada uno de los factores que intervienen en la evolución de la población, permitiendo así obtener un abanico de resultados que constituyen un margen de variación para intentar poner límites a la incertidumbre generada.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos y características de las proyecciones de población

En el análisis demográfico, se acostumbra diferenciar los términos estimaciones, proyecciones y pronósticos. Por lo general, una **estimación de población** se refiere a una población presente y pasada para la cual no se dispone de recuentos censales. Los términos proyección y pronóstico se utilizan a veces sin distinción acerca de las poblaciones futuras. Hablaremos de **proyección** como el resultado numérico de un conjunto particular de suposiciones sobre la población futura. Una proyección de población es un cálculo condicional que muestra cómo sería una población futura si un conjunto particular de suposiciones fuera cierto. Un **pronóstico** es una proyección que ha sido seleccionada como la más probable para proporcionar una predicción precisa de una población futura (George et al. 2004). Una opción que se usa a menudo es construir proyecciones basadas en diferentes conjuntos de suposiciones que representan escenarios alternativos.

En nuestro caso particular nos centraremos en las proyecciones de población. A partir del conocimiento que se logre sobre las tendencias de las variables demográficas, las proyecciones de población se elaboran mediante modelos que simulan el futuro, apoyados en supuestos razonables de evolución de la situación prevaleciente en el periodo utilizado para su diagnóstico. Están basados en los principios de la teoría fundamental de que toda población evolucionará a largo plazo, logrando transformaciones de su dinámica demográfica hacia condiciones de estabilidad.

Esta evolución tendría lugar bajo las condiciones propias de cada país y con determinantes no necesariamente iguales, aunque la mayor incertidumbre está en definir el calendario del proceso y, de otro lado, disponer de elementos para dimensionar lo que puede significar el componente migratorio.

Los avances metodológicos y el desarrollo de las actividades de investigación demográfica han significado un gran progreso en el conocimiento del comportamiento de los componentes demográficos, particularmente de la mortalidad y de la fecundidad y su consideración para la extrapolación de las tendencias demográficas futuras. Factores como las variables intermedias de la fecundidad, la postergación del matrimonio, el uso de anticonceptivos, el aborto inducido y la infecundidad posparto son, entre otras, las nuevas variables que pueden considerarse para prever el futuro demográfico de una población.

Con los avances informáticos de hoy en día se puede simular lo que pasaría si, por ejemplo, se mantuvieran constantes las condiciones de la mortalidad y la fecundidad, evaluar los efectos y consecuencias de determinadas políticas migratorias (movimientos de entrada o salida), determinar las condiciones demográficas que deben buscarse para alcanzar un determinado tamaño o ritmo de crecimiento poblacional, etc.

Toda proyección lleva en sí un grado de incertidumbre que no es posible eliminar. Con el modelo que se use para establecer la perspectiva de la población se busca anticipar el complejo e incierto futuro partiendo de hipótesis más o menos elaboradas, tanto como lo permite la disponibilidad de información básica del pasado más reciente. Alteraciones imprevistas de tipo coyuntural (terremotos, guerras, epidemias, etc.) no pueden incluirse en los supuestos de las proyecciones y añaden ruido al modelo.

Por tanto, podríamos decir que una **proyección de población** es el conjunto de resultados provenientes de cálculos relativos a la evolución futura de una población partiendo usualmente de ciertos supuestos respecto al curso que seguirá cada uno de los componentes demográficos básicos.

## 1.1. Objetivos generales de las proyecciones de población

Las proyecciones se orientan a producir cifras de población y otros resultados demográficos utilizables para el diseño y ejecución de programas que se realizan por parte de los sectores público y privado. Se busca establecer también los efectos de los cambios en las condiciones económicas y sociales, además de evaluar el impacto real de los programas que se lleven a cabo. En términos más específicos, la preparación de las proyecciones de población de un país particular puede tener variados propósitos:

- Como escenario de evolución de la población por sexo y edad que constituyen la base analítica e instrumental para la orientación del estado y de sector privado en la toma de decisiones, programación, gestión seguimiento y evaluación de sus actividades.
- Conocer el efecto de los cambios en las variables demográficas, la mortalidad, la fecundidad y la migración.
- Comparar una situación hipotética con la realidad para evaluar el efecto de las modificaciones deseadas o efectos ya presentados.
- Obtener estimaciones básicas sobre la población futura, útiles para el análisis demográfico, construcción de indicadores o como elementos indispensables para otros cálculos sociodemográficos.

Por tanto, las proyecciones de población constituyen el principal y más valioso instrumento para establecer anticipadamente la capacidad productiva y las necesidades básicas de una nación, de parte de su territorio e incluso de grupos poblacionales específicos. Además, cuanto más amplia y desarrollada sea una sociedad, mayor será la cantidad y especificidad de la información requerida para la preparación de los planes de desarrollo económico y social.

## 1.2. Clasificación de las proyecciones

Una de las principales clasificaciones que suele establecerse está relacionada con su aplicación para resolver o prever soluciones de problemas asociados a períodos cronológicos muy variables que exigen distintos niveles de decisión.

Respecto a la extensión que abarcan los datos obtenidos en los programas de proyecciones, podemos distinguir tres tipos:

- I. **Proyecciones a corto plazo:** Cubren períodos muy cortos, en general no más allá de cinco años. Si se apoyan en el conocimiento adecuado de las condiciones demográficas más recientes, los resultados sin duda pueden considerarse como fidedignos. Este tipo de proyecciones son utilizadas para la elaboración de planes quinquenales o similares.
- II. **Proyecciones a medio plazo:** En este caso se refiere a las perspectivas que se elaboran para un período de hasta 10 o 15 años. Por su extensión, puede ser menor su ajuste a la realidad respecto a las proyecciones de corto plazo, aunque reflejarán las tendencias generales de la dinámica poblacional con bastante exactitud.
- III. **Proyecciones a largo plazo:** Se consideran en este caso a las proyecciones con las cuales se busca cubrir períodos de 15 años o más. Su importancia y utilidad está asociada a la formulación, análisis e interpretación de medidas o políticas demográficas. Como veremos más adelante, el INE usa este tipo de proyecciones en la mayoría de sus indicadores, incluso en algunos casos, se aventura a realizar proyecciones para los próximos 50 años.

Una de las proyecciones fundamentales es la correspondiente a la población total del país, por sexo y grupos de edades. Estas proyecciones, además de proporcionar un marco o cota general, es indispensable como punto de soporte y referencia para la elaboración de otras proyecciones más desagregadas, como por ejemplo en las que se consideren criterios espaciales u otras variables de interés particular.

Según el grado de desagregación de las proyecciones podemos encontrar:

- **Proyecciones globales:** contemplan solamente amplios grupos de personas (por ejemplo, la población total del país sin especificar las edades).
- **Proyecciones desagregadas:** perspectivas de población de grupos pequeños y más homogéneos donde se pueden incluir variables como edad, la ocupación, el estado conyugal, la educación, etc.
- **Proyecciones regionales:** Se refieren a grupos de población vinculados a espacios geográficos (por ejemplo, provincias). Estas pueden ser a su vez globales o desagregadas.
- **Proyecciones derivadas:** se obtienen como subproducto de un programa más amplio que las contenga (por ejemplo, las proyecciones de la población en edad escolar, población de la tercera edad, etc.).

### 1.3. Fuentes de datos

Uno de los principales obstáculos para la elaboración de proyecciones demográficas, es la fase de formulación y construcción de las hipótesis que podrían marcar el futuro de las variables demográficas determinantes del crecimiento de la población. Existen factores que pueden condicionar las estimaciones futuras como son la calidad y cantidad de información del pasado (base de nuestras previsiones), así como la orientación y condicionamiento que pueda atribuirse a las teorías y políticas de población que se estén implementando en el momento y que bien podrían provocar un sesgo de nuestras previsiones respecto a la realidad.

Respecto a fuentes básicas de información para la preparación de las proyecciones de población, éstas son variadas y de muy diversa calidad. La fuente de datos principal y más importante la constituyen sin duda los censos nacionales de población por ser estos los que aportan el conocimiento sobre el tamaño y estructuras de la población total del país y sus diversas subpoblaciones. Los censos de población han llegado a convertirse también en fuentes primarias para obtener datos útiles para definir las condiciones generales y las tendencias de la mortalidad, la fecundidad y las migraciones internas e internacionales.

## Capítulo 2

# Métodos para calcular proyecciones de población

Gracias al desarrollo de la informática es posible la creación de nuevos métodos y técnicas de estimación. Por lo general, los modelos se apoyan en la extrapolación de las tendencias pasadas y la experiencia de otras sociedades con situaciones similares. Todo ello, bajo el supuesto de que las condiciones del futuro se irán configurándose de manera ordenada a partir de la situación establecida para los momentos más recientes y de su pasado histórico. En cuanto a las orientaciones metodológicas de las cuales van a depender los resultados de una proyección, podemos distinguir varios tipos de modelos. Todos los casos prácticos realizados en este apartado **son de elaboración propia**.

### 2.1. Modelos matemáticos

Se trata de la aplicación de una o más funciones matemáticas que se ajustan a la información histórica del pasado reciente. Para efectos de la proyección total (no desagregada por edad y sexo) se supone que los cambios futuros han de seguir un comportamiento que puede ser descrito de forma apropiada mediante una función matemática particular. Son los procedimientos más simples en su aplicación y de más fácil comprensión conceptual ya que requieren de poca información, poco tiempo y tecnologías bastante simples.

Estos métodos son adecuados si suponemos que el crecimiento de la población sigue un ritmo regular que se ajusta al modelo y que las condiciones socioeconómicas imperantes se mantendrán en el futuro (o variarán de forma gradual) siguiendo las tendencias pasadas. La selección de las funciones a utilizar se apoya en consideraciones sobre las tendencias históricas de los incrementos de la población en dos o más momentos. Algunos de estos modelos matemáticos son el modelo lineal:  $Y = a + b * X$  o el modelo exponencial:  $Y = a * b^X$

Este último modelo se puede convertir en un modelo lineal tomando su logaritmo, quedando de la forma  $\log(Y) = \log(a) + X * \log(b)$ .

Tanto el modelo lineal como el exponencial suponen que la población seguirá aumentando (o disminuyendo) a lo largo del tiempo dependiendo del valor de  $b$ , que es un indicador de la tasa de crecimiento de la población. Dado que es poco probable que esto suceda en poblaciones humanas, los modelos matemáticos que involucran un límite superior (asintótico) del tamaño de la población se consideran más apropiados.

Hay dos modelos asintóticos de uso común. Uno de estos, el modelo de Gompertz, que fue desarrollado en un intento de descubrir una ley de mortalidad (Gompertz 1825). El otro modelo asintótico de uso común es el modelo Logístico (Verhulst 1845; Verhulst 1847; Pearl & Reed 1920). Ambos modelos se usan con bastante frecuencia en demografía, así como en otras ciencias.

Las ecuaciones para estos dos modelos son:

- *Modelo Gompertz:*  $Y = k * a^{b^X}$
- *Modelo Logístico:*  $Y = \frac{1}{k+a*b^X}$

Tomando logaritmos el modelo Gompertz se puede reescribir como:

$$\log(Y) = \log(k) + \log(a) * b^X$$

y el modelo Logístico como:

$$\frac{1}{Y} = k + a * b^X$$

En las ecuaciones anteriores  $Y$  es la población,  $k$ ,  $a$  y  $b$  son los parámetros del modelo, y  $X$  es una medida de tiempo. En el modelo Gompertz,  $k$  es la asíntota mientras que en el modelo Logístico la asíntota corresponde a  $\frac{1}{k}$ . La asíntota es una constante matemática para un conjunto dado de datos de población siempre que las tendencias pasadas continúen prevaleciendo en el futuro. Bajo estas condiciones, permite indicar el tamaño máximo posible de una población en el futuro si continúa siguiendo el modelo.

### 2.1.1. Ajuste de los modelos Logístico y Gompertz

Hay muchos procedimientos para ajustarse a estos modelos. Uno de estos procedimientos es el método de totales parciales, el cual implica los siguientes cinco pasos (Croxtton et al. 1968):

1. La variable de tiempo (X) se convierte en ( $x$ ) tomando desviaciones de su primer valor y dividiendo por el factor común, es decir, la distancia entre cada valor de X (que se supone que es constante). Este procedimiento dará como resultado el primer valor de ( $x$ ) como 0, el segundo como 1 y así sucesivamente.
2. La variable de población (Y) se transforma en  $\log(Y)$  para el modelo de Gompertz y en  $\frac{1}{k}$  para el modelo Logístico.
3. Los valores de la transformada son divididos en tres partes iguales siendo la suma de cada parte  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Cada una de estas sumas contiene  $n$  observaciones. Si el número de observaciones no es un múltiplo de 3, entonces se deben eliminar una o dos observaciones. Si el residuo es 1, entonces puede descartarse una observación al principio o al final. Cuando el residuo es 2, entonces se puede descartar una observación al principio y otra al final, o ambas al principio o al final.
4. Los parámetros se calculan de la siguiente forma:

#### Gompertz

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}$$

$$\log(a) = \frac{(S_2 - S_1) * (b - 1)}{(b^n - 1)^2}$$

$$\log(k) = \frac{1}{n} * \left[ S_1 - \frac{b^n - 1}{b - 1} * \log(a) \right]$$

#### Logístico

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}$$

$$a = \frac{(S_2 - S_1) * (b - 1)}{(b^n - 1)^2}$$

$$k = \frac{1}{n} * \left[ S_1 - \frac{b^n - 1}{b - 1} * a \right]$$

5. Sustituyendo en las ecuaciones originales los valores de los tres parámetros de la variable escalada ( $x$ ) como 0, 1, 2, y así sucesivamente, los valores esperados,  $\log(\hat{Y})$  y  $\frac{1}{\hat{Y}}$  son estimados. Estos se convierten luego en los correspondientes valores esperados (tendencia) denotados por ( $\hat{Y}$ ).

Es necesario tener presente que cuando se realizan estimaciones por métodos matemáticos, los resultados solo pueden ser satisfactorios para previsiones a corto plazo y que, por lo general, no siempre es posible establecer un tipo de función que reproduzca totalmente todos los puntos de una serie de observaciones. Esto es debido a que el crecimiento real de una población puede estar sometido a fluctuaciones coyunturales lo que hace difícil que se consiga un ajuste estricto a un modelo particular.

### Caso práctico: Ajuste de los modelos logístico y de Gompertz

La tabla 1 que se muestra a continuación, recoge los datos de población para España durante el período comprendido entre 1970 y 2020 en intervalos de 10 años.

La primera columna indica el año donde se obtuvo la información (X) y la segunda, contiene la población a mitad del mismo (Y). La tercera columna da el valor de escala de X como se describe en el primer paso. En decir, se toma la diferencia desde el punto de partida (1970) y se divide en 10 debido a que las observaciones tienen una diferencia de 10 años.

Tabla 1. Población total de España (1970-2020)

Año (X)	Población en millones (Y)	x
(1)	(2)	(3)
1970	33,81	0
1980	37,49	1
1990	38,87	2
2000	40,57	3
2010	46,58	4
2020	47,35	5

*Fuente: Instituto Nacional de Estadística (I.N.E.)*

Siguiendo el segundo paso, se calculan los valores  $\log(Y)$  y  $(\frac{1}{Y})$  directamente sobre la población de España (columna 2). Según el tercer paso, se calculan los valores de  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Dado que el número total de observaciones es 6, cada valor tomará 2 observaciones. En el cuarto paso, usando la versión apropiada (es decir, Gompertz o Logística) los tres parámetros de los dos modelos son calculados aplicando las respectivas fórmulas vistas anteriormente:

Modelo Gompertz		Modelo Logístico	
S1 =	3,102961	S1 =	0,056251
S2 =	3,197820	S2 =	0,050376
S3 =	3,343519	S3 =	0,042588
b <sup>2</sup> =	1,535964	b <sup>2</sup> =	1,325512
b =	1,239340	b =	1,151309
log(a) =	0,079036	a =	-0,008390
log(k) =	1,462987	k =	0,037150
asíntota =	29,04	asíntota =	26,92

Los dos modelos genéricos serían:

**Gompertz:**  $\log(\hat{Y}) = 1,462987 + 1,239340^x \cdot (0,079036)$

**Logístico:**  $\frac{1}{\hat{Y}} = 0,037150 - 0,008390 \cdot 1,151309^x$

Siguiendo el quinto y último paso, cada valor de (x) dado en la tercera columna es sustituido para obtener los diferentes valores esperados ( $\hat{Y}$ ) en cada modelo. En la siguiente tabla se han recogido los resultados de aplicar el proceso completo.

Tabla 2. Ajuste de la población total de España (1970-2020)

Año (X)	Población en millones (Y)	x	log(Y)	Log ( $\hat{Y}$ )	Gompertz ( $\hat{Y}$ )	$\frac{1}{Y}$	$\frac{1}{\hat{Y}}$	Logístico ( $\hat{Y}$ )
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1970	33,81	0	1,529	1,542	34,84	0,030	0,029	34,77
1980	37,49	1	1,574	1,561	36,39	0,027	0,027	36,38
1990	38,87	2	1,590	1,584	38,40	0,026	0,026	38,42
2000	40,57	3	1,608	1,613	41,06	0,025	0,024	41,07
2010	46,58	4	1,668	1,649	44,61	0,021	0,022	44,62
2020	47,35	5	1,675	1,694	49,44	0,021	0,020	49,56

Fuente: Elaboración propia basada en datos del I.N.E.

La asíntota para el modelo de Gompertz,  $k$ , ha resultado ser 29,04 millones, mientras que la del modelo Logístico,  $\frac{1}{k}$ , ha sido 26,92 millones. Estos son parámetros determinados de forma matemática y es difícil decir si alguna de estas cifras es realista. Los intentos de predecir matemáticamente los límites a largo plazo del crecimiento humano de las poblaciones no han tenido demasiado éxito hasta la fecha.

Si comparamos el valor real (columna 2) con las estimaciones realizadas (columnas 6 y 9 para Gompertz y Logístico respectivamente), podemos comprobar como el máximo error en la estimación se produce para 2020, arrojando una cifra un 4,41% superior a la real (47,35 vs 49,44) para el modelo Gompertz y un 4,66% superior (47,35 vs 49,56) para el Logístico.

Estos modelos tienen sentido realmente si queremos realizar proyecciones de población en un periodo de tiempo futuro (o pasado). Para ello simplemente requiere la estimación de  $(x)$ , valor que habrá que sustituir en las dos ecuaciones genéricas anteriores.

Por ejemplo, supongamos que quisiéramos hacer una proyección de la población total de España tanto futura en 2030, como pasada, en 1960 (10 años antes al primer valor real que disponemos), obtendríamos los siguientes valores de  $(x)$ :

$2030: (x) = \frac{2030-1970}{10} = 6$	$1960: (x) = \frac{1960-1970}{10} = -1$
--	---

Sustituyendo en nuestros modelos para la proyección futura (2030) obtenemos:

- *Gompertz*:  $\log(\hat{Y}) = 1,462987 + 1,239340^6 \cdot (0,079036) = 56,15$  millones
- *Logístico*:  $\frac{1}{\hat{Y}} = 0,037150 - 0,008390 \cdot 1,151309^6 = 56,78$  millones

Vemos que ambas proyecciones coinciden en que la población total de España en el año 2030 superará los 56 millones de habitantes. A priori, parece una previsión muy superior a la que otros expertos señalan. Esto puede ser debido a que se trata de una muestra pequeña (6 observaciones) que además atraviesa un fenómeno demográfico muy importante en España como es el ‘Baby boom’ que propició un crecimiento más pronunciado de lo habitual y que el modelo no puede corregir.

Si hacemos el mismo ejercicio para la proyección pasada (1960):

$$- \text{Gompertz: } \log(\hat{Y}) = 1,462987 + 1,239340^{-1} \cdot (0,079036) = 33,63$$

$$- \text{Logístico: } \frac{1}{\hat{Y}} = 0,037150 - 0,008390 \cdot 1,151309^{-1} = 33,49$$

Para la estimación regresiva, es decir, para 10 años antes del primer registro que tenemos, podemos comprobar que la población estimada, según ambos modelos, que había en España en 1960 rondaba los 33,5 millones de habitantes. Para esta ocasión sí tenemos la opción de comprobar que población hubo realmente en dicho año. Si vemos el dato según el I.N.E, comprobamos que realmente había 30,52, por lo que, en la mayoría de los casos, las proyecciones están sobre estimadas arrojando valores superiores a los que realmente son.

### 2.1.2. Ajuste de datos mediante una función logística

Se trata de otro de los modelos matemáticos empleados en demografía para analizar las tendencias del crecimiento de una población y de diversos indicadores demográficos. Es importante tener claro que cualquiera que sea la subpoblación que se considere, el uso de esta función requiere de información comparable, ya sea de una serie de censos de población o de un registro permanente que aporte información sobre evolución histórica del fenómeno y que sirva de base para la definición de los parámetros de la función. Es corriente que se suponga una evolución logística para elaborar las proyecciones de la población total urbana y rural, las proyecciones de la población de áreas pequeñas (como ciudades) y de otros sectores de población.

Una de las formas más simples de la función logística puede escribirse como:

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{f(t)}}$$

En el caso particular de una proyección de población  $N(t)$  representa la población estimada en el momento  $t$ , en tanto que la constante  $K$  corresponde al campo máximo de variación (o más precisamente el límite máximo de población que podría esperarse hacia el futuro).

Por su parte  $f(t)$  es un polinomio que puede tomar diversas formas. Una de las más elementales para aplicaciones con datos de población es una línea recta, es decir,  $f(t) = a + b \cdot t$ , con lo cual:

$$N(t) = k_1 \frac{K_2}{1 + e^{a+b \cdot t}}$$

Para encontrar la solución de la función de ajuste a los puntos de observación es necesario derivar los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ . Para ello, se fija previamente la asíntota que marcaría el volumen máximo de población que puede llegar a alcanzar el país o área particular, en este caso esta identificada por la suma de la letra  $K = k_1 + K_2$ .

Esta función posee elementos característicos que son:

1. La curva que describe la función logística presenta un periodo de aumento (o reducción) de tipo continuo con aceleración que va cambiando a lo largo del tiempo.
2. Presenta un punto de incremento máximo, que coincide con el punto de inflexión de la curva y alrededor de la cual la función es simétrica.
3. A partir de este punto de inflexión la curva presenta un proceso de desaceleración manteniéndose por abajo de la asíntota que se le haya definido
4. La tasa de crecimiento de la función logística siempre disminuye de forma continua a partir de una tasa  $r(i)$  tendiendo a cero, mientras  $N(t)$  tiende a  $K$ . Bajo tales condiciones la función logística expresa diversos comportamientos observados en muchas poblaciones reales en la medida que su comportamiento sigue razonablemente la evolución cuantitativa de la población y la tendencia de indicadores de diversos aspectos de la dinámica de la misma, entre otros, el grado de urbanización, las condiciones de alfabetismo, etc. Su expresión matemática y desarrollo analítico es sencillo y como tal tiene un papel y uso importante en el campo del análisis demográfico y, específicamente, en el trabajo de la elaboración de las proyecciones de población.

5. Determinación de los parámetros de la función logística. La determinación de los valores límites del parámetro  $K$  hacia el cual pueda llegar a tender una función logística en una aplicación particular es posible fijarlo utilizando algunos conceptos de poblaciones teóricas. Se pueden utilizar algunas relaciones espaciales como la densidad (indicador que puede llegar a tener una tendencia más suave y con límites manejables) o establecer un punto tentativo a partir de una tasa de crecimiento suficientemente baja, manteniéndola constante por un período prolongado de tiempo. También es posible aproximarnos a este punto utilizando el concepto de potencial de crecimiento.

Los dos parámetros de la función se obtienen mediante un procedimiento estadístico, por ejemplo, el método de los mínimos cuadrados. Para tal propósito la función logística puede transformarse en la siguiente relación lineal:

$$Z = \ln \left( \frac{K_1 + k_2 - N(t)}{N(t) - k_1} \right) = a + b \cdot t$$

Los valores de las observaciones empíricas de diversos indicadores utilizados para establecer aspectos relacionados con cambios en las condiciones sociodemográficas de la población, se caracterizan por tener un campo de variación que se enmarca dentro de límites perfectamente definidos. Su comportamiento en el largo plazo se ajusta de manera muy coherente a la tendencia que describe una función logística con parámetros particulares que determinan su configuración.

### **Caso práctico: Ajuste mediante función logística**

Se presenta un ejemplo de ajuste mediante dicha función logística obteniendo las cifras de población total de España en el I.N.E. entre los años 2002 y 2021. A partir de esta información y utilizando el método de los mínimos cuadrados (como se definió anteriormente) se logra determinar los valores de  $a$  y  $b$  que definen la función logística que los ajusta. Se adoptó como asíntota  $k_1$  un valor de 40 mil y un  $K_2 = 52$  millones de habitantes, cifra que podría representar el punto hacia el cual tendería a estabilizarse la población.

Mediante el método de mínimos cuadrados y utilizando las ecuaciones normales que resulten, se obtienen los valores de los dos parámetros de la función logística que se ajusta a estos datos. Utilizando la función definida por esos parámetros se pueden obtener unas estimaciones y proyecciones de la población española que se ajustan a la serie de datos históricos.

Los valores en concreto que se obtienen para nuestro ejemplo son:

$$a = 0,8 \text{ y } b = -0,16.$$

De esta manera, se puede señalar la perspectiva de evolución histórica de la población total de España que se desprende de su crecimiento histórico y con el supuesto respecto a su potencial de crecimiento.

Así, puede ser expresada basándose en una función logística de la forma:

$$N(t) = k_1 \frac{K_2}{1 + e^{a+b \cdot t}} = 40.000 \frac{52.000.000}{1 + e^{0,8-0,16 \cdot t}}$$

Con esta ecuación se pueden obtener estimaciones intercensales o extrapolar sus valores hacia el futuro o hacia el pasado, para obtener estimaciones de corto, mediano y largo plazo.

De la aplicación de la logística a los datos de población de España se puede derivar el índice de cambio relativo. Como veremos más adelante, a partir de ello se puede señalar que los índices de cambio relativo dejan entrever que la población del país estará cambiando sus patrones de crecimiento. Aunque la población seguirá creciendo en términos absolutos, la tasa de crecimiento implícita es decreciente en el tiempo.

En la siguiente tabla (Tabla 3) se han tomado los datos del Instituto Nacional de Estadística para el periodo comprendido entre 2002 y 2021. A dichos datos comprendidos entre el periodo  $t=0$  y  $t=19$ , se le han calculado los distintos parámetros anteriormente descritos, quedando el resultado como se muestra a continuación.

Tabla 3. Población total de España (2002-2021) y parámetros calculados

AÑO	t	N(t)	U	ln (U)=Z	t*z	t^2
2002	0	41.035.271	0,268	-1,315	0,000	0
2003	1	41.827.836	0,244	-1,409	-1,409	1
2004	2	42.547.454	0,223	-1,499	-2,998	4
2005	3	43.296.335	0,202	-1,599	-4,796	9
2006	4	44.009.969	0,183	-1,700	-6,801	16
2007	5	44.784.659	0,162	-1,819	-9,096	25
2008	6	45.668.938	0,140	-1,969	-11,813	36
2009	7	46.239.271	0,126	-2,075	-14,525	49
2010	8	46.486.621	0,120	-2,124	-16,991	64
2011	9	46.667.175	0,115	-2,161	-19,447	81
2012	10	46.818.216	0,112	-2,193	-21,926	100
2013	11	46.727.890	0,114	-2,173	-23,908	121
2014	12	46.512.199	0,119	-2,129	-25,549	144
2015	13	46.449.565	0,120	-2,116	-27,514	169
2016	14	46.440.099	0,121	-2,115	-29,604	196
2017	15	46.527.039	0,119	-2,132	-31,981	225
2018	16	46.658.447	0,115	-2,159	-34,544	256
2019	17	46.937.060	0,109	-2,218	-37,708	289
2020	18	47.332.614	0,100	-2,307	-41,530	324
2021	19	47.398.695	0,098	-2,323	-44,132	361

*Fuente: Elaboración propia basada en datos del I.N.E.*

Las estimaciones para las fechas censales difieren levemente de los valores reales, con diferencias pequeñas y variables, ya que es imposible que la función reproduzca todos los puntos. No obstante, al utilizar el método de los mínimos cuadrados para encontrar la función de ajuste se supone que esta línea conlleva las mínimas diferencias posibles entre los valores observados y los estimados

Una vez obtenidos estos valores, nos encontramos capacitados para realizar la proyección de la población total de España para los próximos 15 años, es decir, para el periodo comprendido entre 2022 y 2035. La tabla que se muestra a continuación nos muestra tanto la población estimada como el índice de crecimiento relativo que nos va a indicar si el crecimiento se ralentiza como auguran muchos expertos (debido a la bajada de la natalidad, entre otros factores) o no.

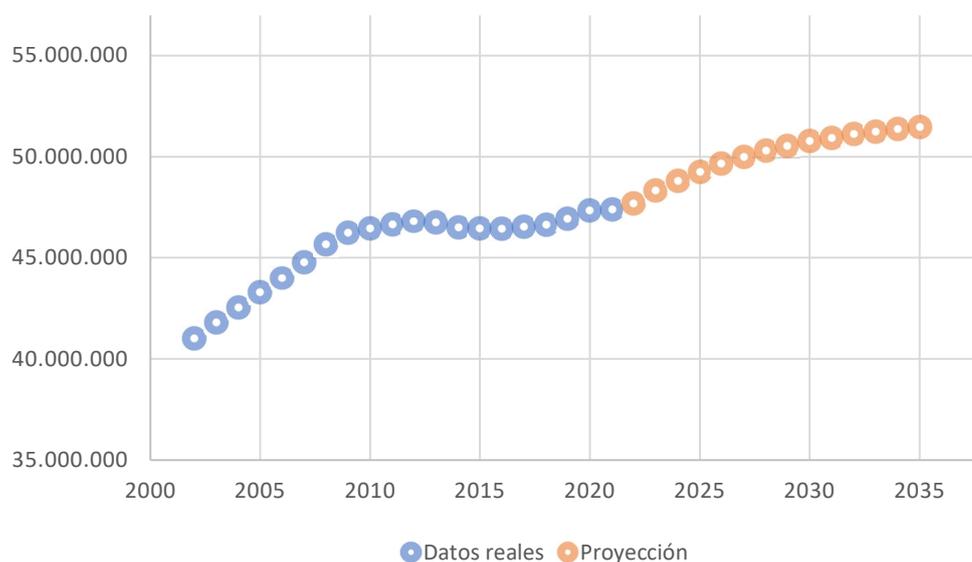
Tabla 4. Proyección población total España (2022-2035)

Año	t	N(t)	Índice crecimiento relativo
2022	20	47.715.020	0%
2023	21	48.308.608	1,24%
2024	22	48.826.220	1,07%
2025	23	49.276.141	0,92%
2026	24	49.666.139	0,79%
2027	25	50.003.382	0,68%
2028	26	50.294.400	0,58%
2029	27	50.545.078	0,50%
2030	28	50.760.674	0,43%
2031	29	50.945.850	0,36%
2032	30	51.104.717	0,31%
2033	31	51.240.879	0,27%
2034	32	51.357.483	0,23%
2035	33	51.457.267	0,19%

*Fuente: Elaboración propia basada en datos del I.N.E.*

Como se puede apreciar en la tabla, la población en los próximos años tendrá un aumento que será menos pronunciado a medida que nos acercamos a 2035. La barrera de los 50 millones de habitantes en España, según la función logística, se superará en 2027. Gráficamente se vería de la siguiente forma:

Gráfico 1. Proyección de la población total de España a través de una función logística (2022-2035)



## 2.2. Modelos demográficos

Esta metodología se apoya en el uso de modelos que relacionan los cambios de la población en el tiempo con las transformaciones que ocurran en los componentes de la dinámica demográfica como son la mortalidad, la fecundidad y las migraciones. Apoyándonos en el análisis de sus tendencias pasadas y de las condiciones más recientes, se proyectan los posibles comportamientos futuros de las mismas y, con base a esos supuestos, se obtienen las proyecciones de la población.

Un ejemplo de este modelo es la tasa de crecimiento anual promedio. Se trata de una tasa constante de la población que permite extrapolarla en el futuro o en el pasado. La suposición principal de este método es que dicha tasa de crecimiento permanecerá constante y la población sujeta continuará creciendo de dicha forma (o disminuyendo si la tasa es negativa).

Hay que tener en cuenta que, con el tiempo, las poblaciones humanas experimentan tasas cambiantes de crecimiento demográfico. Por ejemplo, la población de Australia experimentó una tasa de crecimiento anual promedio del 1,6% durante la mayor parte del siglo pasado, pero varió notablemente dentro de este período, desde menos del 1% durante la depresión económica de la década de 1930, hasta el más alto (alrededor del 2,3%) inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial. O sin ir más lejos, en España en el año 2013 se inició un periodo de crecimiento negativo que duraría varios años. En los años siguientes continuó esa tendencia hasta 2016 y, si bien en los últimos años el crecimiento ha sido positivo, se ha mantenido siempre por debajo del 1%.

El modelo demográfico de mayor utilización para estimaciones de población es la ecuación compensadora. Este modelo se apoya en datos de los censos de población e información de entradas (nacimientos e inmigrantes) y salidas (defunciones y emigrantes).

Dada una población inicial en un momento  $t$ , la estimación para un momento  $t+n$  tendrá la siguiente forma:

$$N^{t+n} = N^t + B^{t,t+n} - D^{t,t+n} + I^{t+n} - E^{t+n}$$

Donde,

$N^t$  y  $N^{(t+n)}$  son las poblaciones estimadas para los momentos  $t$  y  $t+n$ .

$B^{(t,t+n)}$  representa los nacimientos ocurridos a lo largo del período  $t, t+n$ .

$D^{(t,t+n)}$  corresponde a las defunciones que ocurren entre los miembros de la población inicial  $N^t$ , más las defunciones que adicionalmente se registran de los nacimientos ocurridas a lo largo del período  $t, t+n$ .

$I^{(t+n)}$  y  $E^{(t+n)}$  representan los inmigrantes y emigrantes internacionales respectivamente del período  $(t, t+n)$ , estimados al final del mismo.

Si bien este modelo es de uso generalizado, una de las mayores dificultades para su aplicación es la inexistencia y/o deficiencias de la información sobre nacimientos, defunciones y migraciones. Cuando el modelo se emplea en subpoblaciones que corresponden a divisiones geográficas de un país, (como pueden ser las provincias) suelen presentar mayores dificultades con las estadísticas demográficas como consecuencia de los problemas de calidad y cobertura. En estos casos la situación se hace aún más compleja en la medida que se trata de poblaciones abiertas en el sentido más amplio y por lo regular existe mucha dificultad para disponer de datos sobre las tendencias pasadas sobre todo de las migraciones.

### **2.2.1. Proyecciones por edad: método de los componentes**

En el campo de la demografía, es el modelo de más amplia utilización en la mayoría de países del mundo para elaborar las proyecciones de población por sexo y grupos de edades. El modelo es en realidad la expresión particular de la ecuación compensadora solo que, en este caso, se utiliza el sexo y la edad como variables que homogeneizan el manejo de la evolución particular de las diversas cohortes de individuos a través del tiempo.

Este modelo, además de generar las proyecciones por sexo y edad, permite obtener una amplia y detallada gama de indicadores sociodemográficos, así como otros que son de gran utilidad para desarrollar las labores de planificación en los más variados campos de actividad.

Una de sus características de este modelo es que permite incorporar, de manera integral y sistemática, las propuestas sobre evolución de las variables determinantes de la dinámica poblacional (la mortalidad, la fecundidad y la migración) a partir del conocimiento de la evolución histórica que las mismas han tenido en fechas recientes.

Las cohortes de edad generalmente se definen en grupos de edad de 5 años, pero también se pueden usar grupos de edad únicos o de 10 años. Una característica del proceso es que las tasas de natalidad, supervivencia y migración deben ser coherentes con los grupos de edad seleccionados para la proyección y también con el ciclo temporal de la misma. En consecuencia, si la población base está en grupos de 5 años de edad, entonces la proyección suele ser también para un período de 5 años, y las tasas de supervivencia y migración también deben estar en grupos de 5 años de edad. Sin embargo, la proyección puede extenderse a más de un ciclo de proyección. Esto se puede hacer tomando la proyección del primer ciclo como base para el ciclo siguiente, pero manteniendo constantes o variando las tasas de fecundidad, mortalidad y migración para algunos o todos los ciclos de proyección subsiguientes.

La forma general de la ecuación es la siguiente:

$$N^{t+5} = N^t + B^{t,t+5} - D^{t,t+5} + I^{t+5} - E^{t+5}$$

Siendo la interpretación de estos parámetros similar al caso general. En base a este modelo, las cifras de población proyectadas mediante el método de los componentes son, en cada fecha fija futura, el resultado de la acción combinada de los factores determinantes principales del crecimiento que actúan sobre la población inicial y a lo largo de cada período quinquenal sobre los sobrevivientes y las nuevas generaciones.

Al incorporar el sexo y la edad como variables explicativas del comportamiento de cada una de las variables demográficas, el tamaño, la composición y la distribución geográfica de la población dependen, al igual que el modelo general, de las tendencias de la mortalidad, de la fecundidad y de la migración con la consideración del sexo y la edad como variables básicas.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. El primer paso en el proceso es establecer el año de lanzamiento (tiempo =  $t$ ) con la población en ese momento por sexo en grupos de edad de 5 años, además de obtener los datos sobre fertilidad, mortalidad y migración.
2. El segundo paso es la estimación del número de personas en cada grupo de sexo-edad que sobreviven al siguiente ciclo (tiempo =  $t + 5$ ). Esto se realiza estimando las tasas de supervivencia específicas por edad y sexo para cada grupo en la población de lanzamiento en el tiempo  $t$ . Las estimaciones de las tablas de vida relevantes de hombres y mujeres suelen formar la base para estos cálculos. Este proceso da como resultado una población de 5 años y más en el tiempo  $t + 5$ .
3. El tercer paso implica el ajuste del número de supervivientes de 5 años y más por el efecto de la migración neta.
4. En el cuarto paso, se calcula la población de 0-4 años en el tiempo  $t + 5$  y se ajusta para la migración neta. Las tasas de nacimiento específicas por edad se usan para estimar el número de nacimientos durante el período  $t$  hasta  $t + 5$ . Después se desagregan por sexo y se ajustan, según la mortalidad infantil y la migración neta, para estimar la población de 0 a 4 años en el período  $t + 5$ . Como se ha mencionado anteriormente, la población proyectada al final del primer ciclo de proyección se convertirá, a su vez, en el punto de partida para el siguiente ciclo. Este proceso se repite hasta que la fecha objetivo sea alcanzada.

Es evidente que una serie de supuestos están implícitos en este proceso y en la selección de las tasas de natalidad, supervivencia y migración. A menos que exista evidencia de lo contrario, una de las suposiciones más simples es que dichas tasas específicas por sexo y edad vigentes en el momento  $t$ , permanecerán constantes durante el período de, al menos, el primer ciclo de proyección de aproximadamente 5 años.

Para los ciclos siguientes se pueden hacer diferentes conjuntos de supuestos de fecundidad, mortalidad y migración para preparar más de un escenario de proyección. En general, se utilizan al menos tres escenarios (crecimiento alto, medio y bajo) para preparar las proyecciones de población en la mayoría de los países.

Como hemos podido comprobar, la característica básica de las proyecciones de población por el método de los componentes es que utiliza la edad como variable fundamental para expresar el comportamiento de cada uno de los componentes.

La importancia de la consideración de esta variable radica, entre otras, en las siguientes consideraciones:

1. La edad es el rasgo personal más relevante que se asocia a la condición biológica de cada individuo. Como referencia a la fecha de nacimiento de cada persona, la edad es invariable e independiente de los factores socioeconómicos y culturales. Bajo tal condición, los diversos grupos de edades, es decir, las cohortes de nacimientos, tienen características más homogéneas y pueden ser tratadas como subpoblaciones particulares.
2. La edad es una variable fundamental en los análisis de la evolución histórica de la mortalidad en la medida que las distintas causas de muerte afectan de manera diferente a las personas según su edad. En relación a la edad de las personas se logra sintetizar, en gran parte, los efectos de la mortalidad en una población y expresar su comportamiento mediante modelos por sexo y edad.
3. La edad es un factor condicionante de la capacidad y del comportamiento reproductivo de la población y se constituye, por tanto, en una variable básica en los análisis de la fecundidad y nupcialidad.
4. La edad también es importante como variable condicionante y explicativa de los procesos y comportamientos de movilidad espacial, además determina de manera amplia las posibilidades y los comportamientos económicos y sociales de las personas.

## ➤ **Otras consideraciones generales y escenarios posibles**

Como se mencionó anteriormente, las proyecciones generalmente se hacen bajo diferentes escenarios utilizando distintas tasas de fecundidad, mortalidad y migración. Por lo tanto, se puede suponer que la tasa de fertilidad, la esperanza de vida al nacer y las tasas de migración neta aumentan o disminuyen con respecto a las del año de lanzamiento. Si bien podrían usarse modelos sofisticados para pronosticar las tasas de fecundidad y mortalidad en el futuro, los niveles de inmigración, tanto internos como internacionales, son mucho más difíciles de pronosticar. También hay que señalar que las proyecciones se revisan periódicamente a medida que se dispone de nuevos datos a través del censo y/o de otras fuentes.

Otra cuestión fundamental para la aplicación del modelo de los componentes es la construcción de una serie de propuestas (escenarios) sobre cada uno de los componentes del crecimiento demográfico, es decir, la mortalidad, la fecundidad y la migración.

Lo que al final se requiere son las funciones necesarias de cada componente de conformidad con los requerimientos del modelo y como las decisiones sobre tendencias futuras se apoyan en el análisis demográfico histórico más reciente ya que la calidad de las hipótesis dependerá de dicho diagnóstico.

Las oficinas de estadística de la mayoría de los países preparan proyecciones de población a nivel nacional y, en algunos casos, incluso a nivel provincial como es el caso del I.N.E. También ocurre en otros países, por ejemplo, las proyecciones para la población de Estonia y su capital, Tallin, están disponibles bajo varios escenarios en su página web. Las Naciones Unidas producen proyecciones de población para la mayoría de los países del mundo basadas en distintos escenarios, los cuales son revisados de forma frecuente. Recientemente ha publicado un conjunto de proyecciones basado en el modelo probabilístico de la fertilidad total y la esperanza de vida al nacer para los países que no estén afectados por la alta prevalencia de VIH.

## 2.2.2. Proyecciones por edad: método de cambio de cohorte

En esta sección se describe un método alternativo y más sencillo para las proyecciones de población, aunque tiene mayores requisitos de datos de entrada en comparación con el método de los componentes. Este método a menudo se atribuye a Hamilton y Perry (1962), aunque más recientemente otros autores han incorporado muchas mejoras.

Los datos de entrada básicos requeridos consisten en la distribución por edades de una población en dos puntos en el tiempo, digamos,  $t$  y  $t + k$ . Por lo general, se toman de los dos censos más recientes que tienen  $k$  años de diferencia (los censos en la mayoría de los países tienen una diferencia de 5 o 10 años). Se pueden utilizar censos en otros intervalos, pero requeriría algunos ajustes a las fórmulas presentadas en esta sección. El método implica dos pasos:

1. Cálculo por edad (y sexo si fuera necesario) de la tasa de cambio de cohorte a partir de datos en los dos censos más recientes realizados en el tiempo  $t$  y  $t + k$ .
2. Aplicar estas tasas a la población en el tiempo  $t + k$  para proyectar la población al periodo  $t + 2k$ ,  $t + 3k$  y así sucesivamente.

La fórmula general para la estimación de la razón de cambio de cohorte para una cohorte de edad  $x$  hasta  $x+n$  en el periodo  $t$  que se mueve de la edad  $x + k$  hasta  $x + k + n$  en el tiempo  $t + k$  es:

$${}_nR_{x \rightarrow x+k}^{t \rightarrow t+k} = \frac{{}_n P_{x+k}^{t+k}}{{}_n P_x^t}$$

Donde,

${}_n P_{x+k}^{t+k}$  es la edad de la población  $x+k$  hasta  $x+n+k$  en el periodo  $t+k$

${}_n P_x^t$  es la edad de la población  $x$  hasta  $x+n$  en el periodo  $t$

$k$  es el intervalo entre dos censos

$n$  es la amplitud del intervalo de edad. Es esencial que  $k$  sea múltiplo de  $n$ .

Para estimar la población proyectada ( ${}_n P_{x+k}^{t+2k}$ ) de edad  $x + k$  a  $x + k + n$  en el año  $t + 2k$ , se usa la siguiente ecuación:

$${}_n P_{x+k}^{t+2k} = {}_n R_{x \rightarrow x+k}^{t \rightarrow t+k} * {}_n P_x^{t+k}$$

Por el grupo de edad abierto  $\geq 85$  (también conocido como 85+) tendremos:

$$R_{\geq x-k \rightarrow \geq x}^{t \rightarrow t+k} = \frac{P_{\geq x}^{t+k}}{P_{\geq x-k}^t}$$

Donde,

$R_{\geq x-k \rightarrow \geq x}^{t \rightarrow t+k}$  la razón de cambio para una cohorte de edad  $\geq x-k$  en el periodo  $t$  hasta la edad  $\geq x$  en el periodo  $t + k$ .

$P_{\geq x}^{t+k}$  es la edad  $\geq x$  en el periodo  $t + k$

$P_{\geq x-k}^t$  es la población de edad  $\geq x-k$  en el periodo  $t$

Quedando la ecuación ahora de la forma siguiente:

$$P_{\geq x}^{t+2k} = R_{\geq x-k \rightarrow \geq x}^{t \rightarrow t+k} * P_{\geq x-k}^{t+k}$$

Donde,

$P_{\geq x}^{t+2k}$  es la población de edad  $\geq x$  en el periodo  $t + 2$

$P_{\geq x-k}^{t+k}$  la población de edad  $\geq x-k$  en el periodo  $t + k$ .

Dependiendo de los valores de  $n$  y  $k$ , solo proporcionaría la población proyectada en el momento  $t + 2k$ , para las edades  $x + k$  y mayores. Así, por ejemplo, si  $k=5$ , sólo daría la población proyectada para la edad de 5 años y posterior. Sin embargo, si  $k=10$ , la población proyectada solo puede calcularse para edades de 10 años y mayores. En tales circunstancias, se puede utilizar un método diferente. Hamilton y Perry sugirieron el uso de datos de nacimiento, pero como tal vez no estén fácilmente disponibles en algunas regiones, se podría utilizar un método alternativo. Implicaría el cálculo de proporciones niño-adulto definidas de manera similar a las proporciones niño-mujer. En este caso, el denominador consistirá en los grupos de edad de los adultos que están estrechamente asociados con la edad de los niños (Swanson et al. 2010; Swanson & Tedrow 2012).

La relación niño-adulto promedio para niños de  $x$  a  $x + n$ , durante el período  $t$  a  $t + k$  ( ${}_nC_x^{t \rightarrow t+k}$ ) es:

$${}_nC_x^{t \rightarrow t+k} = \frac{nP_x^t + nP_x^{t+k}}{{}_{30}P_{15}^t + {}_{30}P_{15}^{t+k}}$$

El numerador es la suma del número de niños en el grupo de edad  $x$  a  $x + n$ , y el denominador es la suma de la población de 15 a 44 años, ambos en los tiempos  $t$  y  $t + k$  respectivamente. La población proyectada para el grupo de edad  $x$  a  $x+n$  en el momento  $t + 2k$ , ( ${}_nP_x^{t+2k}$ ) sería:

$${}_nP_x^{t+2k} = {}_nC_x^{t \rightarrow t+k} * {}_{30}P_{15}^{t+2k}$$

siendo  ${}_{30}P_{15}^{t+2k}$  es la población proyectada de 15 a 44 años en el momento  $t + 2k$ .

Como se señaló anteriormente, si los dos censos están separados por 10 años y las distribuciones de edad están en grupos de edad de 5 años, entonces las dos ecuaciones se usarían dos veces: una vez sustituyendo en estas ecuaciones  $x = 0$  y  $n = 5$  (para el grupo de edad de 0-4 años), y otra vez sustituyendo  $x = 5$  y  $n = 5$  (para el grupo de edad de 5-9 años). Sin embargo, si los dos censos tienen una diferencia de 5 años, entonces solo se requerirá la estimación para el grupo de edad de 0 a 4 años.

Este método supone que los cambios demográficos entre los dos censos continuarán prevaleciendo en el futuro. Si bien esto puede no ser un problema para las proyecciones a corto plazo, puede provocar escenarios poco probables para las que son a largo plazo. El método también se puede usar para manipular las proyecciones de otras características como la etnia, la religión o la clase social, así como para desarrollar proyecciones a nivel de áreas pequeñas. Al usar este método para este propósito, es útil, aunque no necesario, asegurarse de los límites geográficos del área en cuestión no hayan cambiado con el tiempo.

Una desventaja de este método estudiado es que puede conducir a estimaciones irrazonablemente altas en lugares de rápido crecimiento y proyecciones irrazonablemente bajas en lugares que experimentan pérdidas de población (Smith et al. 2001; Swanson et al. 2010). Los cambios en los límites geográficos son un problema, particularmente para áreas geográficas pequeñas, como distritos censales o distritos de recolección.

Además, dado que el cambio de cohorte y otros métodos de extrapolación se basan en los cambios de población dentro de un área dada, es útil tener límites geográficos que permanezcan constantes a lo largo del tiempo y esto en algunas áreas provinciales presenta un gran desafío. La última desventaja de este método es que no permite la creación de diferentes escenarios que involucren una variedad de supuestos sobre los niveles futuros de fecundidad, mortalidad y migración, a diferencia del caso del método de componentes.

### **Caso práctico: Ajuste mediante el método de cambio de cohorte**

Los datos de edad de Andalucía de 2016 y 2021 obtenidos del I.N.E. se han utilizado para proyectar la población de dicha comunidad autónoma tanto para 2026 como para 2031.

Como veremos a continuación en la Tabla 5, las proporciones de cambio de cohorte dadas en la columna (4) para los grupos de edad 5-9 a 80-84 fueron estimados con las ecuaciones vistas en el apartado anterior. En las ecuaciones usadas en esta sección, tanto  $n$  como  $k$  son igual a 5 y  $t=2021$ .

En el primer ciclo de proyección (2021-2026), 2021 fue el año de lanzamiento. Las poblaciones proyectadas por edad en 2026, mostradas en la columna (5) para los grupos de edad de 5-9 hasta 80-84, se estimaron utilizando la ecuación:

$${}_n P_{x+k}^{t+2k} = {}_n R_{x \rightarrow x+k}^{t \rightarrow t+k} * {}_n P_x^{t+k}$$

El primer valor de la columna (edad 0-4 años) se calculó:

$${}_n P_x^{t+2k} = {}_n C_x^{t \rightarrow t+k} * {}_{30} P_{15}^{t+2k}$$

También ocurre lo mismo con el último valor, el grupo abierto (85+) que cuenta con su fórmula propia como ya vimos en la parte teórica:

$$R_{\geq x-k \rightarrow \geq x}^{t \rightarrow t+k} = \frac{P_{\geq x}^{t+k}}{P_{\geq x-k}^t}$$

Tabla 5. Proyección población total Andalucía (2026-2031)

Grupo edad	Población		Tasa cambio cohorte	Población proyectada 2026	Tasa cambio cohorte	Población proyectada 2031
	2016	2021				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0-4	414.431	358.486	0,1174	375.085	0,1179	356.832
5-9	485.385	430.752	1,0394	372.604	1,0394	389.856
10-14	459.992	490.668	1,0109	435.440	1,0109	376.659
15-19	434.358	465.342	1,0116	496.375	1,0116	440.505
20-24	470.267	447.653	1,0306	479.585	1,0306	511.568
25-29	509.761	475.704	1,0116	452.829	1,0116	485.130
30-34	587.566	515.009	1,0103	480.601	1,0103	457.490
35-39	695.642	594.739	1,0122	521.296	1,0122	486.469
40-44	691.554	696.918	1,0018	595.830	1,0018	522.252
45-49	670.533	689.126	0,9965	694.471	0,9965	593.738
50-54	624.592	665.377	0,9923	683.827	0,9923	689.131
55-59	538.891	617.409	0,9885	657.725	0,9885	675.963
60-64	435.876	529.831	0,9832	607.029	0,9832	646.667
65-69	384.487	424.411	0,9737	515.895	0,9737	591.062
70-74	327.605	359.503	0,9350	396.833	0,9350	482.372
75-79	260.428	289.542	0,8838	317.734	0,8838	350.726
80-84	217.959	207.238	0,7958	230.406	0,7958	252.840
85+	178.780	214.699	0,5412	228.335	0,5412	248.252
<b>Total</b>	<b>8.388.107</b>	<b>8.472.407</b>		<b>8.541.900</b>		<b>8.557.513</b>

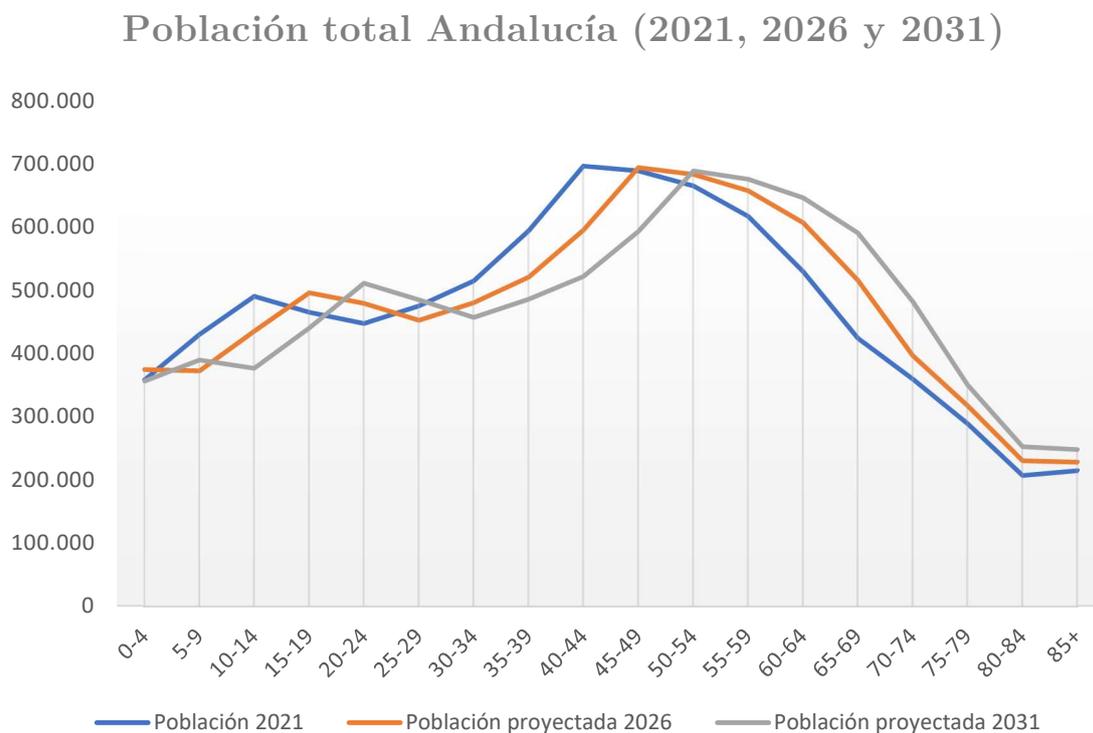
Fuente: Elaboración propia basada en datos del I.N.E.

Como podemos ver, el proceso fue replicado para los dos ciclos de proyección. Para 2026 se toma 2021 como año de lanzamiento y para el caso de 2031, se usa el propio año 2026 estimado como año de lanzamiento usando las mismas ecuaciones mencionadas anteriormente.

La población real en Andalucía para los años 2016 y 2021 fueron de 8.388.107 y 8.472.407 personas respectivamente. Las proyecciones realizadas indican que se esperaba que la población de Andalucía aumente en 69.493 personas entre 2021 y 2026 hasta alcanzar los 8.541.900 habitantes. El aumento se ralentiza de cara a la siguiente estimación ya que se espera un aumento de 15.613 personas durante los otros 5 años, alcanzando los 8.557.513 habitantes en 2031.

Como veremos en el siguiente gráfico, la población es cada vez más envejecida ya que las líneas se encuentran más desplazadas a la derecha.

Gráfico 2. Representación gráfica estimación método del cambio de cohorte



Como hemos comentado anteriormente, se produce un envejecimiento de la población andaluza. La máxima frecuencia se encuentra en 2031 para las personas comprendidas entre 50 y 54 años alcanzan los 689.131. También vemos como a medida que se proyecta de cara al futuro, hay mayor población de 85 años o más, ligado a una esperanza de vida cada vez mayor.

Por analizar de forma descriptiva el envejecimiento de la población, hemos tomado como fecha de corte 60 o más años. Dicho grupo de población era un 22% del total en 2016, un 24% en 2021 y se espera que represente un 27% en 2026 y un 30% en 2031, es decir, **3 de cada 10 habitantes de Andalucía en 2031 tendrán 60 o más años.**

Como hemos visto, las predicciones de población permiten ver el futuro y tomar medidas de forma anticipada antes de que sea demasiado tarde. En este caso, el fomento de la natalidad podría ser una excelente medida debido a que el sistema podría volverse insostenible en una región con tantas personas jubilada (o a las puertas de hacerlo) y con tan escasa población activa.

### 2.3. Modelos socioeconómicos

Reconociendo que existe interrelación entre los aspectos socioeconómicos con los comportamientos demográficos, se considera que es posible hacer proyecciones de población mediante modelos que utilicen dichas relaciones. En este caso, la formulación de las hipótesis de evolución demográfica se apoya en los análisis de los cambios en el comportamiento de variables económicas, de las interrelaciones con los cambios en las variables demográficas y, en el estudio del efecto de esos cambios sobre el crecimiento de la población.

La proyección de características socioeconómicas tiene un rasgo importante que la distingue de las proyecciones estrictamente demográficas debido a que se trata de características logradas y no atribuidas. Las características atribuidas se establecen esencialmente al nacer, como el sexo y la fecha de nacimiento (lo que determina la edad en un momento determinado), mientras que las características alcanzadas no se determinan al nacer, como puede ser el nivel educativo, la situación laboral y el estado civil. Si bien la raza y la etnia son características que se establecen en gran medida al principio, pueden cambiar según el contexto social y las circunstancias. La implicación es que las proyecciones de las características socioeconómicas involucran supuestos además de los de las proyecciones de características estrictamente demográficas, y que pueden vincularse más directamente con las decisiones políticas. Por ejemplo, la edad en que termina la asistencia escolar obligatoria y la edad en que las personas pueden ingresar a la vida laboral.

Las características logradas a menudo se relacionan con aquellas características cumplidas que están asociadas con el ciclo de vida, por ejemplo, la edad en el primer matrimonio, la edad en el primer parto o la edad en la primera experiencia laboral. A su vez, esto significa que estas características están vinculadas a la estructura de la población, y son estos vínculos los que proporcionan una base para proyectar las características socioeconómicas.

Con frecuencia se utilizan dos enfoques fundamentales para preparar proyecciones socioeconómicas: el método de tasa (o razón) de participación y el método de progresión de cohortes (George et al. 2004).

- En el primer método de tasa o razón, las características socioeconómicas se relacionan con las características demográficas mediante el uso de tasas o proporciones de participación. Por ejemplo, para preparar las proyecciones de vida laboral, es esencial contar con proyecciones de población, así como con un conjunto de tasas de participación en el mercado laboral. El supuesto sería que la población experimentaría en el futuro dichas tasas dadas de participación en la vida laboral. Las proyecciones de población pueden haber sido preparadas bajo diferentes escenarios usando métodos vistos anteriormente como el método de componente de cohorte o el método de cambio de cohorte (que daría como resultado un solo escenario). Sin embargo, en este caso, puede suponerse que las tasas o coeficientes de participación permanecerán constantes en los niveles actuales o pueden extrapolarse para seguir un patrón diferente en el futuro.
- El segundo método de progresión de cohortes utiliza únicamente el método de cambio de cohorte para proyectar directamente la población de un grupo de personas pertenecientes a una determinada clase socioeconómica. Por ejemplo, usando datos de edad de dos censos consecutivos para un grupo étnico en particular, sería posible proyectar su población en el futuro.

Existen otros dos tipos de proyecciones socioeconómicas que se producen con frecuencia como son las proyecciones de hogares y familias y las proyecciones de zonas urbano-rurales de la población. El método de la tasa de participación se puede utilizar para ambos tipos de proyecciones. Por ejemplo, el tamaño promedio de los hogares/familias puede calcularse para diferentes tipos de estos y asumirse que permanece constante o cambia con el tiempo. Estas tasas pueden luego aplicarse a las proyecciones de población preparadas independientemente para estimar el número futuro de hogares/familias. Se puede usar una metodología similar para estimar el tamaño futuro de las poblaciones urbanas y rurales.

## Caso práctico: Ajuste mediante método de la tasa de participación

Vamos a realizar en este caso un ejemplo de proyecciones de personal ocupado utilizando el método de la tasa de participación con datos procedentes del I.N.E. Para usar este método se necesitan dos conjuntos de datos: las tasas de empleo y las proyecciones de población. Ambos conjuntos de datos son por edad y, si fuera necesario, separado para hombres y mujeres. Las columnas (2) y (3) de la Tabla 6 que veremos a continuación, muestran el número de personas empleadas y la población (ambos clasificados por edad) en Andalucía en 2021. Las tasas de empleo calculadas en base a estos datos se presentan en la columna (4). Las columnas (5) y (6) contienen la población proyectada de Andalucía en 2026 y 2031. Estos datos provienen del ejemplo anterior, asumiendo que las tasas de empleo durante 2021 continuarían prevaleciendo en los próximos 10 años. Por último, el número proyectado de personas ocupadas, columnas (7) y (8), se calcularon multiplicando las poblaciones proyectadas por las tasas de empleo.

Tabla 6. Proyección personas empleadas Andalucía (2026-2031)

Grupo edad	En 2021			Proyecciones para:			
	Personas empleadas	Población (H y M)	Tasa empleo por persona	Población (H y M)		Personas empleadas	
(1)	(2)	(3)	(4)	2026	2031	2026	2031
15-24	555.557	912.995	0,609	975.960	952.073	593.872	579.336
25-54	2.958.960	3.636.873	0,814	3.428.854	3.234.211	2.789.716	2.631.354
55+	1.548.786	1.931.154	0,802	2.177.481	2.396.064	1.746.340	1.921.643
	<b>5.063.303</b>	<b>6.481.022</b>	<b>78,1%</b>	<b>6.582.296</b>	<b>6.582.347</b>	<b>5.129.928</b>	<b>5.132.333</b>

*Fuente: Elaboración propia basada en datos del I.N.E.*

Como podemos ver en la tabla, de un total de 6,481 millones de habitantes que tenía Andalucía en 2021, había un total de 5,063 empleadas (un 78,1%). La previsión de personas empleadas en 2026 nos indica que alcanzará las 5.129.928 personas (un 77,94% de la población total en dicho año) y si miramos 2031, el número de personas empleadas prácticamente se mantiene respecto a 2026, subiendo solo hasta los 5.132.333 (un 77,97% de la población total de 2031).

## Caso práctico: Ajuste mediante método de progresión de cohorte

Como podemos observar en la Tabla 7, se han obtenido los datos de personas matriculadas en España en el curso 2019-2020 (columna 2) y 2020-2021 (columna 3) tanto en Primaria (desde 1º a 6º) como para la Educación Secundaria Obligatoria (desde 1º a 4º). Los datos están obtenidos del Ministerio de Educación y Formación Profesional (Gobierno de España).

Se utilizó el método de progresión de cohorte para proyectar las matrículas para los próximos 2 cursos, 2021-2022 y 2022-2023. En este contexto, este método suele denominarse método de progresión de grado.

Tabla 7. Proyección matriculados en España desde 1º de Primaria a 4º E.S.O. (cursos 2021-2022 y 2022-2023).

Grado	Matrículas		Tasa de progresión entre grados	Proyección matrículas	
	2019-2020	2020-2021		2021-2022	2022-2023
(1)	(2)	(3)	(5)	(6)	(7)
1º Primaria	447.418	446.141	0,100	442.303	439.911
2º Primaria	471.302	448.359	1,002	449.302	450.247
3º Primaria	481.368	469.984	0,997	468.670	467.359
4º Primaria	491.042	482.722	1,003	484.080	485.441
5º Primaria	500.164	491.917	1,002	492.794	493.672
6º Primaria	515.920	504.729	1,009	509.336	513.984
1º ESO	540.188	536.902	1,041	558.737	581.461
2º ESO	532.052	537.104	0,994	534.038	530.989
3º ESO	491.163	499.701	0,939	469.317	440.781
4º ESO	449.426	467.410	0,952	444.806	423.295
	4.920.043	4.884.969		<b>4.853.381</b>	<b>4.827.139</b>

*Fuente: Elaboración propia basada en datos del Ministerio de Educación y Formación Profesional.*

Solo el primer valor de la columna (5) fue calculado de forma distinta al resto. Se estimó de la siguiente forma, donde el denominador fue la suma de los estudiantes desde 2º de Primaria a 4º de la E.S.O. en ambos años:

$$\frac{447.418 + 446.141}{4.472.625 + 4.438.828} = 0,1$$

Para el resto de años el cálculo es más directo. Como ejemplo, el cuarto valor en esta columna se estimó dividiendo el número de estudiantes en 4º de Primaria en 2020-2021 (= 482.722) entre el número en 3º de Primaria de 2019-2020 (=481.368). La relación de progreso de grado del grado 3º al 4º fue estimado como 1,003.

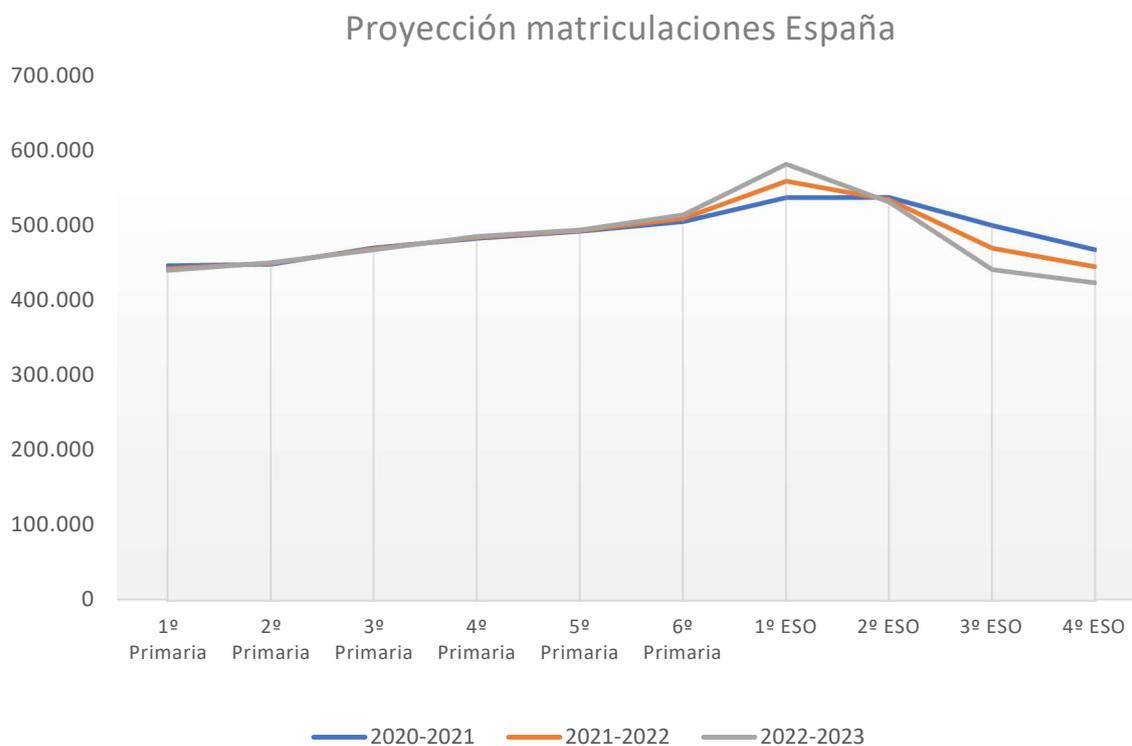
De manera similar, las matrículas estimadas para 1º de Primaria se calcula distinto al resto de curso. En este caso, para el caso 2021-2022 se utiliza la fórmula:

$$0,1 * 4.411.078 = 442.303 \text{ matrículas}$$

Siendo 4.411.078 el número total de estudiantes estimados en los grados desde 2º Primaria hasta 4º de la E.S.O. en 2021-2022. Utilizando 2021-2022 como año de lanzamiento, los valores proyectados para 2022-2023 se estimaron utilizando las ecuaciones del método del cambio de cohorte.

Para el resto de años, las matrículas proyectadas en 2021-2022 mostrados en la columna (6) se estimaron multiplicando todos, excepto el primer valor, en la columna (3), siendo el año de lanzamiento la columna (5).

Gráfico 3. Representación gráfica estimación método de progresión de cohorte



Como podemos ver, el número de matriculaciones hasta 6º de Primaria se espera se mantenga constante, aunque se prevé un aumento en el curso 2022-2023 de los alumnos de 1º de E.S.O. y una disminución a partir de 2º de la E.S.O.

Saber cómo se va a comportar el número de matriculaciones en los próximos cursos es de vital importancia para estimar, por ejemplo, el número de maestros y profesores que se van a necesitar o el número de aulas que deben estar abiertas para mantener las ratios. En función de estos valores, se ajustará el presupuesto a este sector que mueve miles de millones al año, de ahí la importancia de conocer el futuro más próximo tanto para no andar improvisando como para tomar las decisiones antes de que sea demasiado tarde.

## Capítulo 3

# Las proyecciones de población realizadas por el INE

Lo primero que aclara el Instituto Nacional de Estadística sobre las proyecciones de población que realiza es que no pretenden ser una "adivinación" del futuro, sino proporcionar una herramienta de apoyo para la toma de decisiones basada en una simulación estadística del rumbo demográfico que tomaría la población residente en España en los próximos años (siempre bajo la hipótesis de que se mantuviesen las tendencias demográficas actuales). Estos resultados muestran el efecto que, sobre el futuro más próximo, tendrían la evolución recientemente observada de la fecundidad, la mortalidad y las migraciones en cada uno de estos territorios.

De esta forma, sus resultados proporcionan la cifra de población residente en España a 1 de enero de cada año del periodo que abarca el próximo medio siglo, así como la población residente en cada una de las comunidades autónomas y provincias a 1 de enero de cada año del periodo de los próximos 15 años. Igualmente, proporcionan los eventos demográficos (nacimientos, defunciones y movimientos migratorios) que han dado lugar a la evolución del volumen y estructura de la población en cada uno de los ámbitos geográficos considerados que tales cifras poblacionales representan. Ambos tipos de magnitudes, stocks de población y flujos demográficos, se encuentran desagregadas de acuerdo a características demográficas básicas, como el sexo, la edad y el año de nacimiento (generación).

Ha de tenerse en cuenta que todos los resultados detallados de esta operación estadística que ofrece el INE se reportan con cifras decimales, para así garantizar la total coherencia territorial de los mismos y la perfecta consistencia entre flujos demográficos y stocks de población en todos los niveles de desagregación considerados. Además, se establecen una serie de hipótesis alternativas sobre la proyección de algunos fenómenos que dan lugar a distintos escenarios de proyección (solo a nivel nacional) y que muestran la sensibilidad de los resultados ante la variación de las hipótesis de proyección.

Así pues, pretenden proporcionar una herramienta de apoyo para la toma de decisiones basada en una simulación estadística del rumbo demográfico que tomaría la población residente en España en los próximos años. Para realizar las estimaciones se siguen una serie de principios metodológicos que se llevan aplicando con éxito en varias ediciones:

- ✓ La población se proyecta distinguiendo el país de nacimiento, aunque se publican resultados detallados para el conjunto de la población.
- ✓ La fecundidad se proyecta para los próximos 50 años ajustando el calendario de la fecundidad observada y proyectada mediante una distribución de probabilidad Beta de parámetros ICF (Indicador Coyuntural de Fecundidad), EMM (Edad Media a la Maternidad) y Var\_EMM.
- ✓ En el caso de la mortalidad, se realiza una proyección en base a nivel general, sintetizado por la esperanza de vida al nacimiento, estableciendo hipótesis sobre la evolución futura de dicho parámetro.
- ✓ En el caso de las migraciones, los resultados se proyectan realizando una transición entre los flujos estimados para varios años dividiendo así el periodo proyectivo en tres periodos:

- o Los flujos de migración exterior correspondientes a los dos primeros años del periodo proyectivo se establecen iguales al flujo estimado según la Estadística de Migraciones para el primer semestre del año  $t$ .

- o En el segundo periodo (13 años) los flujos migratorios evolucionan desde  $t+1$  hacia unos niveles que se establecen como hipótesis.

- o Durante el tercer periodo (35 años), tanto la inmigración como la emigración se proyectan desde  $t+14$  hasta alcanzar otros niveles para  $t+49$  que se establecen previamente como parámetros de la proyección.

En algunos casos, se solicita información adicional que ayude a completar el modelo y realizar predicciones más precisas.

Un ejemplo de ellos es la encuesta realizada en mayo de 2020 a expertos en demografía de toda España para recabar su opinión sobre la evolución futura esperable para los parámetros necesarios para la proyección como en fecundidad, el número medio de hijos por mujer y la edad media a la maternidad, en mortalidad, la esperanza de vida al nacimiento y en migraciones, los niveles futuros de inmigración y emigración a 15 y 50 años.

A la incertidumbre que habitualmente rodea unas proyecciones de población se le suma otros eventos extraordinarios no predecibles que pueden surgir como pudo ser el impacto de la COVID-19, que obliga a un replanteamiento de algunas de las hipótesis de evolución futura. En concreto, para el caso de la pandemia, se tuvo en cuenta la sobremortalidad observada hasta el mes de julio de 2020, así como la disminución experimentada en los últimos meses en la inmigración y en la emigración (no se proyectó ningún impacto en la migración interior durante ese periodo, dado que hasta ahora no hay evidencias de ello, así como no se experimentó ningún impacto en los nacimientos.)

### **3.1. Método general de cálculo**

El INE para realizar sus proyecciones utiliza el método clásico de componentes visto en el capítulo anterior. Por recordar su funcionamiento, se partía de la población residente en un cierto ámbito geográfico y de los datos observados para cada uno de los componentes demográficos básicos: mortalidad, fecundidad y migración. Se trataba de obtener la población correspondiente a fechas posteriores bajo ciertas hipótesis sobre el devenir de esos tres fenómenos, que son los que determinan su crecimiento y su estructura por edades.

El análisis retrospectivo de cada uno de los fenómenos demográficos básicos, haciendo uso de la información demográfica más actualizada disponible, ha permitido establecer hipótesis sobre la incidencia futura de los mismos en cada nivel territorial considerado en cada año del periodo proyectivo, cuantificada en tasas específicas de fecundidad por generación, de mortalidad por sexo y generación, por sexo y generación de emigración exterior y de migración interior interprovincial, así como en flujos de inmigración exterior para cada sexo y generación.

Además, desde 2018, se han establecido hipótesis diferenciadas por lugar de nacimiento (España o extranjero), por tener ambos colectivos comportamientos y dinámicas demográficas distintas.

La proyección de la población de cada sexo, edad y lugar de nacimiento residente en España y en cada una de sus comunidades autónomas y provincias a 1 de enero de cada año del periodo proyectivo, se lleva a cabo de acuerdo a un modelo de proyección multirregional que proporciona como resultados no sólo las cifras de población por sexo y edad residente en cada uno de los niveles territoriales considerados, sino también las cifras proyectadas de nacimientos, defunciones y movimientos migratorios que tendrían lugar en cada uno de los años del periodo proyectivo, guardando todo ello la necesaria coherencia entre flujos y stocks demográficos y la debida consistencia interterritorial.

### 3.2. Formulación del modelo

Para simplificar el modelo, no se ha tenido en cuenta el lugar de nacimiento (España o extranjero) y se va a realizar exclusivamente para el total nacional. Partiendo de la población residente en cada nivel territorial considerado de sexo (s) y edad (x) a 1 de enero del año t ( $P_{s,x}^t$ ), se obtiene la proyección de población residente de edad x+1 y sexo s en dicha área geográfica a 1 de enero del año t+1 ( $P_{s,x+1}^{t+1}$ ) a partir de las siguientes expresiones:

Para las edades a 1 de enero x=0, 1, 2, ..., 98:

$$P_{s,x+1}^{t+1} = \frac{[1 - 0,5 \cdot (m_{s,x}^t + e_{s,x}^t)] \cdot P_{s,x}^t + IM_{s,x}^t}{[1 + 0,5 \cdot (m_{s,x}^t + e_{s,x}^t)]}$$

Donde,

$m_{s,x}^t$  y  $e_{s,x}^t$  representan la tasa de mortalidad y de emigración en el año t de la generación de individuos residentes en España de sexo s y edad x a 1 de enero del año t.

$IM_{s,x}^t$  es el flujo de inmigración procedente del extranjero en el año t de individuos de sexo s y edad x a 1 de enero del año t.

Para los nacidos durante el año en curso t:

$$P_{s,0}^{t+1} = \frac{[1 - 0,5 \cdot (m_{s,-1}^t + e_{s,-1}^t)] \cdot N_s^t + IM_{s,-1}^t}{[1 + 0,5 \cdot (m_{s,-1}^t + e_{s,-1}^t)]}$$

La interpretación es similar al caso anterior solo que aquí hablamos de la generación de individuos nacidos durante el año t. Entra en juego una nueva variable:  $N_s^t$  que son los nacidos en España de sexo s durante el año t, los cuales se derivan de:

$$N_s^t = r \cdot \sum_{x=14}^{49} \left( \frac{P_{M,x}^t + P_{M,x+1}^{t+1}}{2} \right) \cdot f_x^t$$

Donde,

r es la ratio de masculinidad al nacimiento proyectado en el caso de los varones

$P_{M,x}^t$  población de mujeres de edad x a 1 de enero del año t

$f_x^t$  es la tasa de fecundidad de la generación de mujeres residentes en España que tienen edad x a 1 de enero del año t durante dicho año.

Para el grupo abierto de 100 o más años

$$P_{s,100+}^{t+1} = \frac{[1 - 0,5 \cdot (m_{s,99+}^t + e_{s,99+}^t)] \cdot (P_{s,99}^t + P_{s,100+}^t) + IM_{s,99+}^t}{[1 + 0,5 \cdot (m_{s,99+}^t + e_{s,99+}^t)]}$$

La interpretación es similar a los casos anteriores, simplemente en este caso hay que tener en cuenta que 99+ y 100+ se refiere a individuos de 99 o más años y 100 o más años respectivamente.

Por otro lado, se obtienen las **defunciones de individuos residentes en España** de sexo s y edad x a 1 de enero del año t a lo largo dicho año ( $D_{s,x}^t$ ) para los tres casos en cuestión.

Para los individuos de la generación que tiene edad x=0, 1, 2, ..., 98 a 1 de enero del año t:

$$D_{s,x}^t = m_{s,x}^t \cdot \left( \frac{P_{s,x}^t + P_{s,x+1}^{t+1}}{2} \right)$$

Para los nacidos durante el año en curso t:

Tenemos las defunciones en el año t de residentes en España de sexo s nacidos a lo largo del año:

$$D_{s,-1}^t = m_{s,-1}^t \cdot \left( \frac{N_s^t + P_{s,0}^{t+1}}{2} \right)$$

Donde,

$m_{s,-1}^t$  la tasa de mortalidad de los mismos en dicho año.

Para los individuos de las generaciones que tienen 99 o más años de edad a 1 de enero del año t:

$$D_{s,99+}^t = m_{s,99+}^t \cdot \left( \frac{P_{s,99}^t + P_{s,100+}^t + P_{s,100+}^{t+1}}{2} \right)$$

Donde,

$P_{s,100+}^t$  es población residente en España de sexo s de 100 o más años a 1 de enero del año t

$D_{s,99+}^t$  representa las defunciones de individuos de sexo s y de 99 o más años de edad a lo largo del año t.

También se obtienen las **emigraciones al extranjero de individuos residentes en España** de sexo s y edad x a 1 de enero del año t a lo largo dicho año.

Para los individuos de la generación que tiene edad x=0, 1, 2, ..., 98 a 1 de enero del año t:

$$E_{s,x}^t = e_{s,x}^t \cdot \left( \frac{P_{s,x}^t + P_{s,x+1}^{t+1}}{2} \right)$$

Para los nacidos durante el año t:

$$E_{s,-1}^t = e_{s,-1}^t \cdot \left( \frac{N_s^t + P_{s,0}^{t+1}}{2} \right)$$

Para los individuos de las generaciones que tienen 99 o más años de edad a 1 de enero del año t:

$$E_{s,99+}^t = e_{s,99+}^t \cdot \left( \frac{P_{s,99}^t + P_{s,100+}^t + P_{s,100+}^{t+1}}{2} \right)$$

A partir de las cifras resultantes de este proceso se derivan las cifras por edad de cada fenómeno demográfico bajo la hipótesis de distribución uniforme entre las edades exactas que los individuos de cada generación tendrán en algún momento del año.

Por último, se ha de advertir que el cálculo de la proyección conlleva un proceso iterativo de comprobación de consistencia y ajuste de los resultados nacionales de poblaciones y eventos demográficos proyectados obtenidos de la proyección del total nacional y de la agregación de resultados provinciales, introduciendo sucesivos factores de corrección provinciales que modifican muy ligeramente, en el mismo grado para todas las provincias en cada generación, sexo, lugar de nacimiento (y, por tanto, sin modificar la posición relativa de cada provincia respecto a las demás respecto a la incidencia de cada fenómeno demográfico en cada sexo, edad y lugar de nacimiento), las tasas específicas de fecundidad, mortalidad y emigración al extranjero hasta conseguir la completa consistencia interterritorial de stocks poblacionales y eventos demográficos proyectados.

La proyección de partida de las proyecciones de población en el INE está constituida por las cifras de población a 1 de enero del primer año del año t disponibles en el momento de elaboración y difusión de sus resultados. De esta forma, se garantizará la consistencia de los resultados de una nueva proyección con la serie retrospectiva de cifras poblacionales que el INE emplea en toda su producción estadística.

### 3.3. Proyección de la fecundidad en España

El método general de proyección de la fecundidad de las mujeres residentes en el territorio español se basa en establecer hipótesis sobre la evolución futura del nivel general de fecundidad, sintetizado por el Indicador Coyuntural de Fecundidad (ICF) o número medio de hijos por mujer y de los parámetros que sintetizan su distribución por edad, la Edad Media a la Maternidad (EMM) y la Varianza de la Edad Media a la Maternidad (Var(EMM)).

Por tanto, la proyección de la fecundidad consistirá en establecer ciertas hipótesis sobre la evolución futura de estos tres parámetros para así obtener las tasas de fecundidad por edad para cada año del periodo proyectivo mediante el ajuste de una distribución de probabilidad Beta. Se realiza una modelización de la fecundidad según el lugar de nacimiento de la madre, para tener en cuenta así el distinto comportamiento de las mujeres nacidas en España y de las nacidas en el extranjero.

La función de fecundidad por edad puede escribirse como:

$$f(x) = D(\beta) \cdot g(x)$$

Donde,

$D(\beta)$  es la descendencia final

$\beta$  es el límite superior del intervalo de edad y  $g(x)$  es el calendario de la fecundidad que determina una densidad de probabilidad definida en el intervalo de edad  $(\alpha, \beta)$  tal que  $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = 1$ .

Por lo tanto, dado que las curvas de fecundidad por edad observadas son curvas continuas, acampanadas, unimodales y ligeramente desviadas a la derecha, una de las distribuciones de probabilidad que mejor puede ajustar el calendario de la fecundidad observada en España es la Distribución de Probabilidad Beta, corregida por los límites de edad inferior  $\alpha$  y superior  $\beta$ .

$$f(x) = D(\beta) \frac{1}{B(a, b)} \frac{(x - \alpha)^{a-1} (\beta - x)^{b-1}}{(\beta - \alpha)^{a+b-1}}, 1 < a < b$$

Donde,

$$a = \frac{[1-m(X)]m^2(X)}{s^2(X)} - m(X), \quad b = \frac{[1-m(X)]^2m(X)}{s^2(X)} - [1 - m(X)]$$

$$\text{y } D(\beta) = \text{ICF}$$

Y si  $\alpha=15$  y  $\beta=49$ , entonces:

$$m(X) = \frac{EMM-15}{35} \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{\text{Var}(EMM)}{35^2}$$

De esta forma, para cada año  $t$  del periodo proyectivo a largo plazo 2020-2069 la curva de fecundidad por edad y lugar de nacimiento de la madre  $n$  se obtendrá como resultado de ajustar una distribución de probabilidad beta de parámetros  $\widehat{ICF}_n^t$ ,  $\widehat{EMM}_n^t$  y  $\widehat{\text{Var}}(\widehat{EMM}_n^t)$ . Es decir, necesitamos una proyección de los parámetros de la distribución beta para cada uno de los años del periodo proyectivo.

En la encuesta a los expertos que se realizó en mayo de 2020 se les preguntó sobre qué valor consideraban que alcanzarían tanto el Indicador Coyuntural de Fecundidad como la Edad Media a la Maternidad en España en los años 2034 y en 2069, separadamente, para las mujeres nacidas en España y para las nacidas en el extranjero.

Entonces, los valores del  $\widehat{ICF}_n^t$  y del  $\widehat{EMM}_n^t$  de cada uno de los años del periodo proyectivo, necesarios para ajustar la correspondiente curva de fecundidad, se obtendrán por interpolación lineal entre el último valor observado y la media aritmética de los valores dados por los expertos en la encuesta para los años 2034 y 2069, respectivamente.

En cuanto a la varianza de la edad media a la maternidad de cada uno de los años del periodo proyectivo se dejará constante e igual al valor que tuviera el último año observado, que en esta edición corresponden a los provisionales de 2019.

Una vez que se dispone de una proyección de los parámetros para cada uno de los años del periodo proyectivo a largo plazo 2020-2069, la tasa de fecundidad para cada edad  $x$  y lugar de nacimiento de la madre  $n$  se obtiene sin más que aplicar las fórmulas:

$$f_n^t(x) = \widehat{ICF}_n^t \frac{1}{B(a,b)} \frac{(x-15)^{a-1} (49-x)^{b-1}}{(35)^{a+b-1}}, \quad 1 < a < b$$

Donde,

$$a = \frac{[1-m(X)]m^2(X)}{s^2(X)} - m(X), \quad b = \frac{[1-m(X)]^2m(X)}{s^2(X)} - [1 - m(X)]$$

Con:

$$m(X) = \frac{\widehat{EMM}_n^t - 15}{35} \quad y \quad s^2 = \frac{\widehat{Var}(EMM_n^t)}{35^2}$$

De esta estimación se extrae el perfil de crecimiento anual que se aplica a partir del último periodo observado. La finalidad de aplicar este factor de corrección, es posibilitar una transición más suave entre el último periodo observado y el primer periodo proyectado.

Finalmente, la tasa de fecundidad proyectada por año de nacimiento de la madre para cada año del periodo proyectivo, se deriva de la semisuma de las tasas proyectadas para ese mismo año correspondientes a las dos edades que durante dicho año puedan tener cumplidas las mujeres de cada generación, bajo la hipótesis de distribución uniforme de los cumpleaños de los individuos a lo largo de un año de calendario.

$$f_{g(t-x),n}^t = \frac{(f_{x,n}^t + f_{x+1,n}^t)}{2} \quad \forall t$$

Con objeto de desagregar las cifras de nacimientos proyectadas por sexo, se aplica la proporción de masculinidad al nacimiento proyectada como el promedio de dichas proporciones observadas en los últimos 10 años para los que se dispone de resultados definitivos de la Estadística de Nacimientos del Movimiento Natural de la Población en el momento de establecer las proyecciones.

### 3.4. Proyección de la mortalidad en España

Aun cuando las hipótesis de proyección se incorporan separadas por el lugar de nacimiento en todos los fenómenos, en el caso de la mortalidad se emplean los mismos parámetros de proyección para los nacidos en España y para los nacidos en el extranjero. Ello es debido al bajo número de defunciones registrado entre la población nacida en el extranjero residente en España, que conlleva un escaso o nulo número de defunciones al desagregarlas por sexo, edad y provincia. Situaciones extraordinarias como la provocada por el COVID-19, hace necesario introducir su efecto en las proyecciones de población.

La metodología de proyección de la incidencia de la mortalidad en España se lleva a cabo a partir de una proyección en base al nivel general sintetizado por la esperanza de vida al nacimiento y se derivan posteriormente tablas de mortalidad acordes con esos valores mediante el uso de tablas tipo.

Se desarrolla en las siguientes etapas:

1. Se proyecta la esperanza de vida al nacimiento para cada uno de los años del periodo proyectivo a largo plazo mediante una regresión lineal de una función logística frente al tiempo o año de calendario, hasta un máximo que se alcanzaría en un futuro teórico fijado en el infinito, esto es, muy alejado del año horizonte. Para ello, se utiliza la función Logit:

$$\text{Logit}(e_0^t) = \frac{(e_0^{\max} - e_0^t)}{(e_0^t - e_0^{\min})}$$

2. El valor máximo de la esperanza de vida al nacimiento o asíntota de la misma  $e_0^{\max}$  se elige como aquel valor que permite que en el último año del periodo proyectivo a largo plazo considerado, la esperanza de vida al nacimiento sea igual a la media aritmética de las respuestas dadas por los expertos, en la encuesta que se les realiza, a la pregunta de qué valor consideraban ellos que alcanzaría la esperanza de vida al nacimiento para los hombres y las mujeres residentes en España, separadamente, dentro de 50 años.

3. El valor mínimo de la esperanza de vida al nacimiento  $e_0^{\min}$  considerado en la función logit del punto 1 será el que proporcione el mejor ajuste al ser asociado con el valor máximo que se considere como límite.
4. La estimación por MCO de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  del modelo lineal:  $\text{logit}(e_0^t) = \alpha + \beta \cdot t$ . A partir de la evolución de la función logit de la esperanza de vida observada, proporcionará una estimación de la esperanza de vida al nacimiento para cada uno de los años del periodo proyectivo, sin más que sustituir en la siguiente ecuación:

$$\widehat{e}_0^t = e_0^{\min} + \frac{(e_0^{\max} - e_0^{\min})}{1 + \exp(\text{Logit}(e_0^t))}$$

5. Con el objetivo de afinar más la proyección de la esperanza de vida al nacimiento de cada año del periodo proyectivo a largo plazo dada por la función logit, se hace una distribución progresiva en 20 años, para las mujeres, y en 40 años, para los hombres, de la diferencia obtenida entre la esperanza de vida al nacimiento observada y estimada para el último año observado.

### 3.5 Proyección de la inmigración y emigración exterior

En primer lugar, se establece una intensidad de inmigración global para para cada año del periodo proyectivo, distinguiendo entre nacidos en España y en el extranjero. Estos flujos se reparten a su vez por sexo, generación y, en su caso, por provincia, con distribuciones promedio a partir de las correspondientes a los últimos cinco años de la Estadística de Migraciones, para evitar la variabilidad propia de un mayor nivel de detalle para un conjunto de datos menor.

Estas distribuciones proyectadas se mantienen constantes a lo largo de la proyección y se lleva a cabo en los siguientes pasos:

1. Proyección de los flujos anuales de inmigración exterior para cada lugar de nacimiento (España y fuera de España). En la edición anterior, se realizaba una estimación now-cast (permite predecir o estimar variables de menor frecuencia para el pasado reciente, el presente y el futuro cercano utilizando información con mayor

periodicidad o frecuencia) o del año corriente para el primer año de la proyección, y los tres años siguientes se obtenían mediante la extrapolación de la tendencia de los años previos. En años como en 2020 debido a la pandemia, es necesario realizar un ajuste de esas cifras.

2. Distribución por sexo: Los flujos totales de inmigraciones de cada lugar de nacimiento se distribuyen por sexo según el promedio de las proporciones por sexo para cada lugar de nacimiento observadas en los últimos cinco años de la Estadística de Migraciones, habida cuenta de la estabilidad observada en dicha distribución. Estas distribuciones se mantienen constantes durante todo el periodo proyectivo.

3. Distribución por generaciones: El flujo de inmigración exterior de España para cada lugar de nacimiento y sexo proyectado se distribuye por generaciones aplicando un perfil por generación constante durante todo el periodo proyectivo, y se obtiene como sigue: Se parte de las estructuras por generaciones de las inmigraciones de los últimos cinco años de la Estadística de Migraciones y se obtiene la estructura promedio. A esta estructura se le aplica una transformación para obviar la extrema variabilidad que presentan los datos en las edades más avanzadas. Para ello, la proporción de personas de 85 y más años se reparte por edades simples de forma constante desde los 85 hasta los 95 años, y de ahí en adelante de forma decreciente hasta llegar a cero para el grupo abierto de 100 y más años.

Posteriormente, la estructura resultante se somete a un procedimiento de suavizado que se extiende a todo el rango de generaciones y que ha consistido en un triple proceso de medias móviles de cinco generaciones consecutivas, con el objetivo de evitar posibles comportamientos aleatorios o de carácter coyuntural.

Para el caso de la proyección de la emigración exterior, la simulación del comportamiento futuro de la emigración al extranjero en España se ha llevado a cabo diferenciando entre la emigración de nacidos en España y nacidos fuera de España, por tratarse de colectivos con distintos comportamientos.

En el proceso de proyección de la población, la emigración exterior entra en forma de tasas de emigración por generación para cada sexo y lugar de nacimiento para cada año del periodo proyectivo. Además, para los años en que la población se proyecta a nivel provincial, también son necesarias las tasas por generación para cada sexo, lugar de nacimiento y provincia en cada año del periodo proyectivo.

En primer lugar, tendremos en cuenta que cualquier tipo de tasa por generación se puede descomponer en el producto de varios factores. Por ejemplo, para cada lugar de nacimiento  $n$ , las tasas de emigración exterior por generación  $x$  para cada sexo  $s$  de un año  $t$  se pueden expresar como:

$$e_{s,n,x}^t = ISE_{s,n}^t \cdot c_{s,n,x}^t$$

Donde,

$ISE_{s,n}^t = \sum_x e_{s,n,x}^t$  el índice Sintético de Emigración exterior para cada año  $t$ , lugar de nacimiento  $n$  y sexo  $s$ .

$c_{s,n,x}^t = \frac{e_{s,n,x}^t}{\sum_x e_{s,n,x}^t}$  el calendario por generación  $x$  para cada año  $t$ , lugar de nacimiento  $n$  y sexo  $s$ .

Los flujos totales de emigraciones de cada lugar de nacimiento se distribuyen por sexo según el promedio de las proporciones por sexo para cada lugar de nacimiento observadas en los últimos cinco años de la Estadística de Migraciones, habida cuenta de la estabilidad observada en dicha distribución.

### **3.6. Proyección de la migración interior**

La simulación de la evolución futura del fenómeno de la migración interior (interprovincial) en España se ha llevado a cabo diferenciando entre las personas nacidas en España y en el extranjero, pues presentan comportamientos diferenciados. Es necesario proporcionar las tasas específicas de migración interior por generación para cada sexo, lugar de nacimiento, provincia de origen y provincia de destino para cada año del periodo proyectivo.

En primer lugar, tendremos en cuenta que estas tasas se pueden descomponer en el producto de varios factores que serán, a grandes rasgos: la intensidad de la emigración desde cada provincia al resto de España (medida a través del índice sintético), un diferencial por sexos, una distribución por generaciones de dicha intensidad (calendario por generación) y un reparto por provincia de destino. En concreto, las tasas específicas de migración interior de la generación x, para cada sexo s y lugar de nacimiento n, desde la provincia h a la provincia k y para cada año t del periodo proyectivo:

$$e_{s,n,x,h,k}^t = ISEint_{n,h}^t \cdot DEint_{s,n,h}^t \cdot c_{s,n,x,h}^t \cdot a_{s,n,x,h,k}^t$$

Donde,

$ISEint_{n,h}^t$  el Indicador Sintético de Emigración Interior desde la provincia h para cada lugar de nacimiento n y para cada año t.

$DEint_{s,n,h}^t$  el diferencial por sexo s, de la provincia de origen h para cada lugar de nacimiento n y para cada año t

$c_{s,n,x,h}^t$  el calendario por generación x de emigración al resto de España en el año t de la población de sexo s, lugar de nacimiento n y residente en la provincia h.

$a_{s,n,x,h,k}^t$  el coeficiente de reparto de la migración interior en cada sexo s, generación x y lugar de nacimiento n desde la provincia h hacia la provincia k en el año t.

La intensidad migratoria desde cada provincia al resto de España para cada lugar de nacimiento se mide a través del  $ISEint$  que se proyecta constante para todo el periodo proyectivo, como el promedio de los índices de para cada uno de los tres últimos años de los datos de migración interior recogidos por la Estadística de Migraciones.

# Bibliografía y fuentes

Adam, A. Y. (1992). *The ABS population projections: overview and evaluation*. *Journal of the Australian Population Association*, 9(2), 109-130.

Australia. (2008). *Australian historical population statistics*. Catalogue No. 31005.0.52.001. Canberra: Australian Bureau of Statistics. <http://www.abs.gov.au/AUSSTATS/abs@.nsf/DetailsPage/3105.0.65.0012008?>

OpenDocument Accessed Feb 2013.

Chen, Z. (1997). *Parameter estimation of the Gompertz population*. *Biometrical journal*, 39(1), 117-124.

Croxton, F. E., Cowden, D. J., & Klein, S. (1968). *Applied general statistics*. Chapter 13. London: Sir Isaac Pitman and Sons Ltd.

Croxton, T. A. (1968). Five Books on Juvenile Delinquency An Essay Review.

George, M. V., Smith, D. A., Swanson, D. A., & Tayman, J. (2004). Population projections. In J. Siegd & D. A. Swanson (Eds.), *The methods and materials of demography* (2nd ed., pp. 561-601). San Diego: Elsevier/Academic.

Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality; and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 115(27), 513-585.

Hamilton, C. H., & Perry, J. (1962). A short method for projecting population by age from one decennial census to another. *Social Forces*, 41, 163-170.

INE. Censo de Población y Viviendas. Madrid: Instituto Nacional de Estadística. <https://www.ine.es/>. Accessed June 2022.

Leguina, J (1989). *Fundamentos de Demografía*. Siglo XXI. Madrid

Ministerio de Educación y Formación Profesional. Sistema de Información <https://www.educacionyfp.gob.es/servicios-al-ciudadano/estadisticas.html>.

Accessed June 2022.

Noboa, A. D. (2021). *Proyecciones de la población de la provincia de Imbabura (Ecuador)*, 2011-2040. *Matemática*, 19(1).

Norden, R. H. (1982). *On the distribution of the time to extinction in the stochastic logistic population model*. *Advances in Applied Probability*, 14(4), 687-708.

Paredes, I., & Silva, E. (2017). *Estimación de la esperanza de vida a nivel municipal y por marginación sociodemográfica: una aplicación del método de Swanson para el caso de México*, 2010. *Estudios demográficos y urbanos*, 32(1), 97-129.

Passel, J. S., & D'Vera Cohn, D. (2008). *US population projections, 2005-2050* (p. 20). Washington, DC: Pew Research Center.

Pearl, R., & Reed, L.j. (1920). On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. *Proceedings of National Academy of Science*. 6(1), 275-288.

Pujol, J. M. (1981). *Métodos de proyección de la población urbana y rural por sexo y grupos de edades*. Notas de población.

Smith, S., Tayman, J., & Swanson, D. A. (2001). *State and local population projections: Methodology and analysis*. New York: Kluwer Academic Press.

Swanson, D. A., Schlottmann, A., & Schmidt, R. (2010). Forecasting the population of census tracts by age and sex: An example of the Hamilton-Perry method in action. *Population Research and Policy Review*. 29(1), 47-63.

Swanson, D. A., & Tedrow, L. (2012). Using cohort change ratios to estimate life expectancy in populations with negligible migration: A new approach. *Canadian Studies in Population*. 39, 83-90.

United Nations. (2012a). *World population prospects 2010 revision*. New York: Department of Economic and Social Affairs. <http://esa.un.org/unpd/wpp/index.htm>. Accessed Feb 2013.

United Nations. (2012b). *Probabilistic population projections based on the 2010 revision of the World population prospects*. New York: Department of Economic and Social Affairs. <http://esa.un.org/unpd/ppp/index.htm>. Accessed Feb 2013.

Verhulsts. P. F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouv. mém. de l'Academic Royale des Sci. Et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18, 1-41.

Verhulsts. P. F. (1847). Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mém. de l'Academic Royale des Sci., des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 20, 1-32.