

Máster en Estadística Aplicada

Trabajo Fin de Máster

Procesos de difusión a partir de las
ecuaciones diferenciales de
Kolmogorov

Inmaculada Cabero Morán



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada

Tutor

Prof. Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

Granada, septiembre de 2021

Máster en Estadística Aplicada
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Trabajo de investigación presentado por Dña. Inmaculada Cabero Morán y dirigido por el profesor Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz

VºBº

Francisco de Asís Torres Ruiz

Inmaculada Cabero Morán

Índice general

Introducción	13
1. Procesos de difusión	15
1.1. Conceptos generales	15
1.1.1. Algunas características de los procesos estocásticos	16
1.2. Procesos de Markov y ecuaciones cinéticas	17
1.3. Simplificación de las ecuaciones cinéticas. Teorema de Pawula. Ecuaciones de Kolmogorov	22
1.4. Definición de proceso de difusión	24
1.5. Los procesos de difusión y las ecuaciones de Kolmogorov	26
1.5.1. Condiciones de frontera en el caso homogéneo	36
1.5.2. Resolución de las ecuaciones de Kolmogorov	40
2. El proceso de difusión lognormal	51
2.1. Obtención del proceso mediante esquemas discretos	51
2.2. Características	55
2.2.1. Función de densidad de transición	55
2.2.2. Distribuciones finito-dimensionales	55
2.2.3. Momentos	58
2.2.4. Función media y covarianza	59
2.2.5. Función media condicionada	59
2.2.6. Función moda y de cuantiles	60

3. Inferencia en procesos de difusión	63
3.1. Estimación por máxima verosimilitud	63
3.2. Inferencia en el proceso lognormal	64
3.3. El proceso de difusión tipo-Gompertz	69
3.3.1. Aplicación a datos reales	72

Índice de figuras

3.1. Peso de los conejos a lo largo del tiempo. 73

3.2. Ecuación para α . Solución por el método de bisección. 74

3.3. Valores observados, función media estimada e intervalos de confianza para los
cuatro conejos elegidos. 77

Índice de tablas

1.	Valores utilizados para obtener el n -ésimo momento y las funciones de moda y cuantil de $G_{\zeta}^{\lambda}(t z, \tau)$	11
2.1.	Valores utilizados para obtener el n -ésimo momento y las funciones de moda y cuantil de $G_{\zeta}^{\lambda}(t z, \tau)$	62
3.1.	Tabla con los valores estimados, errores estándar e intervalos de confianza del 95 % de los parámetros y del tiempo de inflexión.	75
3.2.	Valores estimados, errores estándar e intervalos de confianza del 95 % del límite superior y del valor en el tiempo de inflexión para varios valores del peso inicial.	75

Introducción

La teoría de los procesos de difusión ocupa un lugar central en la teoría de los procesos estocásticos, los cuales vienen definidos como sigue:

Dado el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ y un conjunto ordenado T con $t \in T$ fijo, se tiene que un proceso estocástico es una función medible

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ w &\longrightarrow X_t(w) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

con X_t una variable aleatoria y, $\forall w \in \Omega$ fijo, $X_t(w)$ es una función del tiempo.

Originalmente se trataba de un modelo matemático del movimiento browniano, pero poco a poco se convirtió en una rama importante de la teoría de la probabilidad que estudia la gran clase de procesos con trayectorias de muestra continuas que poseen la propiedad de Markov, generalmente interpretada como la ausencia de efectos secundarios.

Desde los comienzos, la teoría de los procesos de difusión ha tenido vínculos con las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, que también surgen en la teoría de la difusión física y los procesos de conducción de calor. A nivel intuitivo, muchas propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales admiten una interpretación estocástica natural. Esto permite obtener información no trivial sobre el comportamiento de un proceso utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales y, a su vez, nos permite también aplicar argumentos probabilísticos al estudio de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, destacar que en nuestro trabajo hemos abordado la obtención de los procesos de difusión mediante esquemas discretos, pero también podemos relacionar los procesos de difusión con las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo cual daría pie a otro trabajo.

Hoy en día, la teoría de la medida que Kolmogorov convirtió en el fundamento de la teoría de la probabilidad en 1933, ya no está fuera de los límites, y el interés por los métodos probabilísticos ha aumentado. Esto se aplica, en particular, a la teoría de los procesos de difusión. Se le pidió que recomendara una rápida introducción a la teoría de los procesos de difusión, pero ello no fue fácil.

Notar que los libros que tratan los procesos de difusión como parte de la teoría de los procesos estocásticos, como Doob [14], Loève [15], Gikhman y Skorokhod [16], contienen demasiada información antes de llegar a la teoría de los procesos de difusión, por lo que es prácticamente imposible para un principiante elegir lo que es realmente necesario.

Este trabajo consta de 3 capítulos principales. El primero de ellos, titulado *Procesos de difusión*, aborda conceptos generales sobre los procesos (definición de proceso, características de procesos estocásticos, teorema de Doob, ...), así como los procesos de Markov, la obtención de las ecuaciones cinéticas adelantada y atrasada y la simplificación de éstas para la obtención de las ecuaciones de Kolmogorov y Fokker-Plank. Esto se conseguirá gracias al teorema de Pawula, el cual se enuncia y demuestra.

Posteriormente se aborda el concepto de proceso de difusión y se estudiarán más a fondo las ecuaciones de Kolmogorov, verificando en primer lugar que los procesos de difusión verifican tanto la ecuación adelantada como la atrasada. Así, tras ello, se establece la ecuación diferencial atrasada para la función de distribución de transición y para las densidades de transición en el caso de que existan, pero dicha ecuación puede generalizarse a una clase más amplia de funciones.

La resolución de estas ecuaciones depende de las condiciones analíticas de los momentos infinitesimales. Si no presentan ningún problema, las ecuaciones están definidas en \mathbb{R} y la función de densidad de transición puede obtenerse resolviendo cualquiera de las ecuaciones con la condición inicial del tipo delta de Dirac. Sin embargo, si los momentos infinitesimales presentan algún problema analítico, no sería suficiente la condición delta de Dirac. Este problema fue tratado y resuelto por Feller, pero necesitó el uso de una serie de condiciones de frontera, las cuales se estudiarán.

Para finalizar el capítulo, llegamos como última instancia a su resolución mediante el uso de distintos métodos como la aplicación de la transformada de Laplace, la separación de variables

o mediante la transformación al proceso Wiener, entre otras.

A continuación, en el segundo capítulo denotado como *El proceso de difusión lognormal*, nos centraremos en un tipo de proceso concreto, en particular, como bien nos adelanta el título del capítulo, el proceso de difusión lognormal, el cual lo obtendremos mediante esquemas discretos. Una vez obtenido, nos centraremos en sus características (función de densidad, distribuciones finito-dimensionales, momentos, función media y covarianza, función media condicionada y función moda y de cuantiles). Todas estas características, tal y como se podrá ver en dicho capítulo, se pueden abreviar como sigue:

$$G_{\zeta}^{\lambda}(t | y, \tau) = M_{\zeta}(t | y, \tau)^{\lambda_1} \exp \left(\lambda_2 (\lambda_3 \sigma_0^2 + \sigma^2(t - \tau))^{\lambda_4} \right),$$

donde

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$$

y donde

$$M_{\zeta}(t | y, \tau) = \exp(y + H_{\zeta}(\tau, t))$$

con

$$H_{\zeta}(t_0, t) = \int_{t_0}^t h_{\theta}(u) du - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0), \quad \zeta = (\theta^T, \sigma^2)^T.$$

Así, según los distintos valores que tomen z , τ y λ , obtendremos una característica u otra. En la siguiente tabla pueden verse dichas características:

Función	Expresión	z	τ	λ
Momento n -ésimo	$E[X(t)^n]$	μ_0	t_0	$(n, n^2/2, 1, 1)^T$
Momento condicional n -ésimo	$E[X(t)^n X(s) = y]$	$\ln y$	s	$(n, n^2/2, 0, 1)^T$
Moda	$M_o[X(t)]$	μ_0	t_0	$(1, -1, 1, 1)^T$
Moda condicionada	$M_o[X(t) X(s) = y]$	$\ln y$	s	$(1, -1, 0, 1)^T$
Cuantil	$C_{\alpha}[X(t)]$	μ_0	t_0	$(1, z_{\alpha}, 1, 1/2)^T$
Cuantil condicionado	$C_{\alpha}[X(t) X(s) = x_s]$	$\log(x_s)$	s	$(1, z_{\alpha}, 1, 1/2)^T$

Tabla 1: Valores utilizados para obtener el n -ésimo momento y las funciones de moda y cuantil de $G_{\zeta}^{\lambda}(t | z, \tau)$.

Para finalizar el trabajo, se aborda la inferencia, recogida en un tercer capítulo denominado

Inferencia en procesos de difusión. En primer lugar se hace una pequeña introducción a la inferencia y a la estimación por máxima verosimilitud para posteriormente centrarnos en la inferencia en el proceso lognormal anteriormente estudiado.

En primer lugar se obtiene la función de densidad de probabilidad de transición y, teniendo en cuenta que la distribución es lognormal, podemos obtener la función de densidad del vector que contiene a las variables aleatorias de la muestra. Posteriormente, mediante un cambio de variable llegaremos a la función de log-verosimilitud y al sistema de ecuaciones a partir de la cual se obtiene la estimación máximo verosímil de η . Este sistema es el que sigue:

$$\frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} = \left(\frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \mu_1}, \frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \sigma_1^2} \right) = \mathbf{0}.$$

Si dicho sistema tiene solución exacta y dicha solución es un máximo, ésta sería una estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso, y, a partir de dicha estimación, utilizando el Teorema de Invarianza de Zehna, obtendríamos estimaciones de las funciones características del proceso que podríamos usar para predecir el valor del proceso en un instante concreto del tiempo. Sin embargo, es usual que este sistema no tenga solución exacta y se tenga que recurrir a métodos numéricos para buscar su aproximación numérica. En algunos casos, si se puede simplificar el sistema hasta llegar a una única ecuación igualada a cero, que dependa sólo de un parámetro, y que se pueda resolver mediante algún método numérico clásico de obtención de raíces como podría ser Newton-Raphson.

Del mismo modo se obtendrá la estimación máximo verosímil de ζ , que se obtiene como solución al sistema siguiente:

$$\Psi_{\boldsymbol{\theta}} - \Omega_z = 0$$

$$Z_1 + \Phi_{\zeta} - 2\Gamma_{\zeta} - \sigma^2 Z_2 + \sigma^2 Y_{\zeta} = n\sigma^2$$

En el caso de que $h_{\boldsymbol{\theta}}$ sea una función lineal en $\boldsymbol{\theta}$, será posible determinar una solución explícita para este sistema de ecuaciones. Sin embargo, en otros casos, la existencia de una solución de forma cerrada no puede garantizarse, por lo que es necesario utilizar procedimientos numéricos para su resolución.

Posteriormente se estudia la distribución de los estimadores de los parámetros y su repercusión en las correspondientes funciones paramétricas relacionadas, que son de interés en distintas aplicaciones.

Veremos que si h_θ es lineal podremos calcular las distribuciones exactas asociadas a los estimadores de ζ , lo que nos permite establecer regiones de confianza para los parámetros, así como estimadores insesgados de varianza mínima e intervalos de confianza para combinaciones lineales de θ y σ . Sin embargo, en el caso no lineal, no siempre tendremos una expresión explícita para los estimadores de ζ , por lo que impide obtener, en general, distribuciones exactas para ellos, pero, en ese caso, se pueden utilizar distribuciones asintóticas en su lugar. De hecho, sobre la base de las propiedades de los estimadores máximo verosímiles se sabe que $\hat{\zeta}$ se distribuye asintóticamente distribuida como una distribución normal con media ζ y matriz de covarianza $I(\zeta)^{-1}$, donde $I(\zeta)$ es la matriz de información de Fisher asociada a la muestra completa. Se llegará a la conclusión de que los elementos de la diagonal de la matriz $I(\zeta)^{-1}$ proporcionan varianzas asintóticas para las estimaciones de los parámetros, mientras que el método delta proporciona la matriz de covarianza asintótica para $g(\hat{\zeta})$ y, por consiguiente, los elementos de la diagonal son las varianzas asintóticas para la estimación de cada función paramétrica de $g(\hat{\zeta})$.

Posteriormente, con el proceso de difusión tipo-Gompertz, el cual se utilizará como base para estudiar un caso con datos reales, se busca la obtención del modelo estocástico continuo asociado a la curva Gompertz cuyo valor límite depende del valor inicial. Siguiendo un esquema análogo al anterior, llegaremos a una ecuación cuya solución nos proporcionará la estimación de los parámetros buscados y podremos obtener los errores estándar asintóticos para la estimación de dichos parámetros, así como algunas funciones paramétricas de interés como pueden ser el tiempo de inflexión, el valor esperado del proceso en ese instante o el límite superior que determina la capacidad de carga del sistema modelado por el proceso.

Procesos de difusión

1.1. Conceptos generales

En primer lugar debemos conocer la definición de proceso estocástico, la cual utilizaremos, junto con la posterior definición en particular de proceso de difusión, a lo largo del trabajo. Así pues, un proceso estocástico se define como una colección o familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$, ordenadas según el subíndice t , el cual, en general, se suele identificar con el tiempo. Esta idea la podemos generalizar fácilmente, únicamente permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las variables aleatorias sean continuos. Así, un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$. Así, podemos definir un proceso de manera más formal como sigue:

Definición 1.1.1 (Proceso estocástico). *Dado el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ y un conjunto ordenado T con $t \in T$ fijo, se tiene que un proceso estocástico es una función medible*

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ w &\longrightarrow X_t(w) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

con X_t una variable aleatoria y $\forall w \in \Omega$ fijo, $X_t(w)$ es una función del tiempo.

Por lo general, los procesos serán denotados como $\{X(t) : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$.

A continuación se darán una serie de definiciones y características de los procesos estocásticos. La primera de ellas es la definición de proceso separable.

Definición 1.1.2. *Un proceso $\{X(t) : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ es separable si existe un suceso $N \subseteq \Omega$ nulo, es decir, que $P(N) = 0$, y un conjunto $S \subset T$ denso y numerable, el cual llamaremos*

conjunto separante, tal que para todo conjunto cerrado C y para cualquier intervalo abierto I , los conjuntos $\{w : X(t, w) \in C, t \in (I \cap T)\}$ y $\{w : X(t, w) \in C, t \in (I \cap S)\}$ difieren en un subconjunto de N .

Esta definición nos dice que no hay diferencia entre imponer restricciones (mediante conjuntos cerrados) en puntos de un intervalo abierto de T o en subconjuntos numerables del mismo, ya que la diferencia está contenida en un conjunto de medida nula. Esta propiedad se traduce en que las trayectorias del proceso verifican que su valor en cualquier punto de T puede aproximarse por los valores de ella en puntos del conjunto separante. Además, la importancia de este tipo de procesos radica en el conocido como Teorema de Doob, el cual veremos a continuación.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Doob). *Todo proceso estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ en tiempo continuo sobre un espacio de probabilidad completo admite una versión separable, o sea, existe un proceso $\{Y(t) : t \in T\}$ estocásticamente equivalentes a él.*

Nota 1.1.1. *Notar que dos procesos $\{X(t) : t \in T\}$ e $\{Y(t) : t \in T\}$ son estocásticamente equivalentes si se tiene que $P(X(t) = Y(t)) = 1, \forall t \in T$.*

A continuación, veamos una serie de características de los procesos estocásticos.

1.1.1. Algunas características de los procesos estocásticos

- Función media: $m_X(t) = E[X(t)], \forall t \in T$.
- Función covarianza: $C_X(s, t) = E[(X(t) - m(t))(X(s) - m(s))], \forall t, s \in T$.
- Función varianza: $V_X(t) = \text{Var}[X(t)], \forall t \in T$.
- Función característica: $\phi_X(t, \lambda) = E[\exp(i\lambda X(t))], \forall t \in T, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Función cumulant: $K_X(t, \lambda) = \log(\phi_X(t, \lambda))$.
- Funciones momentos de orden k : $M_X^k(t) = E[X(t)^k], \forall t \in T, \forall k \in \mathbb{R}$.
- Funciones percentiles de orden α : $P_X^\alpha(t) = \text{percentil de orden } \alpha \text{ de } X(t), \forall t \in T, \forall \alpha \in [0, 1]$.
- Función moda: $M_X^\alpha(t) = \text{Moda de } X(t), \forall t \in T$.

1.2. Procesos de Markov y ecuaciones cinéticas

Nuestro objetivo es utilizar las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, que no son más que el teorema de la probabilidad total escrito en versión continua para ver si a partir de esta ecuación podemos obtener alguna otra ecuación en forma diferencial. Estas ecuaciones son unas ecuaciones de compatibilidad que relaciona la densidad de transición, pero que realmente es poco útil si no se conoce la función de densidad.

Así pues, el fin es encontrar las denominadas ecuaciones cinéticas adelantada y atrasada, pero para ello debemos definir previamente el concepto de proceso de Markov, el cual se utilizará para nuestro fin.

Definición 1.2.1. *Un proceso $\{X(t) : t \in T\}$ se dice de Markov si $\forall n \geq 0$ y para cualesquiera $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \in T$ se verifica que*

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0) = \\ = P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n) \end{aligned}$$

Visto esto, centrémonos ahora en obtener las ecuaciones cinéticas adelantada y atrasada como bien se ha comentado anteriormente.

Sea entonces $\{X(t) : t \in T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo con espacio de estados continuo. Supongamos que existen las funciones de densidad de transición $f(x, t|y, s)$ que verifican las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$f(x, t|y, s) = \int f(x, t|z, \tau) f(z, \tau|y, s) dz \quad (1.1)$$

con $s < \tau < t$ instantes arbitrarios tales que $X(t) = x$, $X(\tau) = z$ y $X(s) = y$. Esta ecuación de Chapman-Kolmogorov indica que la transición desde el estado y en el instante s al estado x en el instante t , puede analizarse en dos etapas pasando a través de un estado arbitrario z en un instante de tiempo arbitrario τ intermedio entre s y t .

La idea buscada es obtener una forma diferencial de la ecuación anterior cuya posible solución nos diese la densidad buscada.

Sean ahora los instantes $s < t < t + \Delta t$ donde se tiene que $X(s) = y$, $X(t) = z$ y $X(t + \Delta t) = x$. Así, la ecuación de Chapman-Kolmogorov se transforma en la siguiente:

$$f(x, t + \Delta t | y, s) = \int f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | y, s) dz.$$

Si restamos $f(x, t | y, s)$ a ambos miembros en la ecuación anterior se tiene que

$$f(x, t + \Delta t | y, s) - f(x, t | y, s) = \int f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | y, s) dz - f(x, t | y, s).$$

Tomemos ahora una función de tipo Schwartz $R(x)$, la cual tiende a 0. Multiplicando la ecuación anterior a ambos miembros por $\frac{R(x)}{\Delta t}$ e integrando respecto al espacio de estados se tiene que

$$\begin{aligned} & \int R(x) \frac{f(x, t + \Delta t | y, s) - f(x, t | y, s)}{\Delta t} dx = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int R(x) \left(\int f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | y, s) dz \right) dx - \frac{1}{\Delta t} \int R(x) f(x, t | y, s) dx \end{aligned}$$

Tomando límites cuando $\Delta t \rightarrow \infty$ en la ecuación anterior, considerando el desarrollo en serie de Taylor de $R(x)$ en un entorno de z y además suponiendo que existe la derivada de $f(x, t | y, s)$ respecto de t , se tiene que

$$\begin{aligned} & \int R(x) \frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} dx = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \int \left[R(z) + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(z) \frac{(x-z)^n}{n!} \right] \right. \\ & \left. \left(\int f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | y, s) dz \right) dx - \frac{1}{\Delta t} \int R(x) f(x, t | y, s) dx \right) \end{aligned}$$

donde se tiene que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t + \Delta t | y, s) - f(x, t | y, s)}{\Delta t} = \frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t}$ por la definición de derivada y $R(z) + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(z) \frac{(x-z)^n}{n!}$ es el desarrollo en serie de Taylor de $R(x)$ en un entorno de z , donde $R^{(n)}$ representa la derivada n -ésima de R .

Operando la ecuación anterior se llega a

$$\begin{aligned} \int R(x) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} dx &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \int R(z) f(z, t|y, s) \left(\int f(x, t + \Delta t|z, t) dx \right) dz \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int R^{(n)}(z) f(z, t|y, s) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x - z)^n f(x, t + \Delta t|z, t) dx \right) dz \\ &- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int R(x) f(x, t|y, s) dx. \end{aligned}$$

Usando la condición de normalización

$$\int f(x, t + \Delta t|z, t) dx = 1$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int R(x) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} dx &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int R^{(n)}(z) f(z, t|y, s) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x - z)^n f(x, t + \Delta t|z, t) dx \right) dz \end{aligned}$$

Sean $A_n(z, t)$ los límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$ de los momentos de los incrementos condicionados $(E([X(t + \Delta t) - X(t)]^n | X(t) = z] = \int (x - z)^n f(x, t + \Delta t|z, t) dx)$. Así,

$$\int R(x) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int R^{(n)}(z) f(z, t|y, s) A_n(z, t) dz.$$

Integrando por partes en el miembro derecho se tiene que, tomando $z = x$,

$$\begin{aligned} \int R^{(n)}(z) f(z, t|y, s) A_n(z, t) dz &= \int R^{(n)}(z) f(x, t|y, s) A_n(x, t) dx = \\ &= f(x, t|y, s) A_n(x, t) R^{(n-1)}(x) - \int R^{(n-1)}(x) \frac{\partial [f(x, t|y, s) A_n(x, t)]}{\partial x} dx = \dots = \\ &= (-1)^n \int R(x) \frac{\partial^n [f(x, t|y, s) A_n(x, t)]}{\partial x^n} dx \end{aligned}$$

ya que $f(z, t|y, s) A_n(z, t) = f(z, t|y, s) \int (x - z)^n f(x, t + \Delta t|z, t) dx = 0$ cuando $x = z$.

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \int R(x) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int R(x) \frac{\partial^n [f(x, t|y, s) A_n(x, t)]}{\partial x^n} dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int R(x) \left(\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n [f(x, t|y, s) A_n(x, t)]}{\partial x^n} \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Asimismo, se cumple que

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n [f(x, t|y, s) A_n(x, t)]}{\partial x^n} \quad (1.2)$$

Esta ecuación (1.2) se denomina ecuación cinética adelantada.

Nota 1.2.1. Notemos que a los $A_n(x, t)$ definidos anteriormente como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (E([X(t + \Delta t) - X(t)]^n | X(t) = z])$$

se les llama comúnmente momentos infinitesimales de orden n . Así, se tiene que, en particular, cuando $n = 1$, tenemos que $E[\Delta X(t) | X(t) = x] \approx A_1(x, t) \Delta t$, por lo que tenemos entonces que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta X(t) | X(t) = x]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_1(x, t) \Delta t}{\Delta t} = A_1(x, t)$, la cual se denomina media infinitesimal.

Asimismo, cuando $n = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Var}[\Delta X(t) | X(t) = x]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_2(x, t) \Delta t - [A_1(x, t)]^2 (\Delta t)^2}{\Delta t} = \\ &= \frac{\Delta t [A_2(x, t) - [A_1(x, t)]^2 (\Delta t)]}{\Delta t} = A_2(x, t), \end{aligned}$$

la cual se denomina varianza infinitesimal, siendo $\text{Var}[\Delta X(t) | X(t) = x] \approx A_2(x, t) \Delta t - [A_1(x, t)]^2 (\Delta t)^2$.

Nota 1.2.2. Notar asimismo que un proceso se denomina homogéneo cuando sus funciones de probabilidad de transición sólo dependen de los incrementos de tiempo presente e inicial, es decir que $f(y, t + \Delta t | x, t) = f(y, \Delta t | x, 0)$. Como consecuencia, este caso particular las expresiones de los momentos infinitesimales no dependerán del tiempo.

Ahora, con un razonamiento análogo al anterior para la obtención de la ecuación adelantada,

podemos obtener la denominada ecuación atrasada. Veámoslo.

Partamos nuevamente de la ecuación de Chapman-Kolmogorov (1.1). Sean $s - \Delta s < s < t$ tales que $X(s - \Delta s) = y$, $X(s) = z$ y $X(t) = x$. Se tiene así que

$$f(x, t|y, s - \Delta s) = \int f(x, t|z, s)f(z, s|y, s - \Delta s)dz.$$

Restando $f(x, t|y, s)$ a ambos miembros se tiene

$$f(x, t|y, s - \Delta s) - f(x, t|y, s) = \int f(x, t|z, s)f(z, s|y, s - \Delta s)dz - f(x, t|y, s).$$

Teniendo en cuenta que

$$f(x, t|y, s) = \int f(x, t|y, s)f(z, s|y, s - \Delta s)dz$$

se tiene que

$$f(x, t|y, s - \Delta s) = \int [f(x, t|z, s) - f(x, t|y, s)]f(z, s|y, s - \Delta s)dz.$$

Desarrollando $f(x, t|z, s)$ como función de z en un entorno de y se tiene

$$f(x, t|y, s - \Delta s) - f(x, t|y, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|y, s)}{\partial y^n} \int f(z, s|y, s - \Delta s)(z - y)^n dz.$$

Dividiendo por $-\Delta s$ a ambos miembros y tomando $\lim_{\Delta s \rightarrow 0}$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(x, t|y, s - \Delta s) - f(x, t|y, s)}{-\Delta s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|y, s)}{\partial y^n} \\ &\cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \int f(z, s|y, s - \Delta s) \frac{(z - y)^n}{-\Delta s} dz. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$A_n(y, s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \int (z - y)^n f(z, s|y, s - \Delta s)$$

se tiene que

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x, t|y, s)}{\partial y^n} A_n(y, s). \quad (1.3)$$

Esta ecuación (1.3) se denomina ecuación cinética atrasada.

1.3. Simplificación de las ecuaciones cinéticas. Teorema de Pawula. Ecuaciones de Kolmogorov

Ahora nos preguntamos, ¿qué hacemos con las ecuaciones cinéticas anteriores derivadas para un proceso de Markov? ¿Podremos simplificarlas de alguna manera? La respuesta es sí, y para ello utilizaremos el teorema de Pawula que veremos a continuación.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Pawula). *Si $A_n(x, t) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ y si $A_n(x, t) = 0$ para algún n par, entonces $A_n(x, t) = 0 \forall n \geq 3$.*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} A_n(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(X(t + \Delta t) - X(t))^n | X(t) = x] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(X(t + \Delta t) - X(t))^{\frac{n-1}{2}} (X(t + \Delta t) - X(t))^{\frac{n+1}{2}} | X(t) = x] \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$\begin{aligned} A_n^2(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(X(t + \Delta t) - X(t))^{\frac{n-1}{2}} (X(t + \Delta t) - X(t))^{\frac{n+1}{2}} | X(t) = x]^2 \leq \\ &\leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[(X(t + \Delta t) - X(t))^{\frac{n-1}{2} \cdot 2} | X(t) = x] E[(X(t + \Delta t) - X(t))^{\frac{n+1}{2} \cdot 2} | X(t) = x]}{\Delta t} \end{aligned}$$

Asimismo,

$$A_n^2(x, t) \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[(X(t + \Delta t) - X(t))^{n-2} | X(t) = x] E[(X(t + \Delta t) - X(t))^{n+2} | X(t) = x]}{\Delta t}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$A_n^2(x, t) \leq A_{n-1}(x, t)A_{n+1}(x, t) \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$A_n^2(x, t) \leq A_{n-2}(x, t)A_{n+2}(x, t) \quad \text{para } n \text{ par}$$

Supongamos que para $n = r$, con r par, se tiene que $A_n(x, t) = 0$. Tomando $n = r - 2$, $n = r - 1$, $n = r + 1$ y $n = r + 2$ se tiene que

$$A_{r-2}^2(x, t) \leq A_{r-4}(x, t)A_r(x, t) = 0 \quad r \geq 6$$

$$A_{r-1}^2(x, t) \leq A_{r-2}(x, t)A_r(x, t) = 0 \quad r \geq 4$$

$$A_{r+1}^2(x, t) \leq A_r(x, t)A_{r+2}(x, t) = 0 \quad r \geq 2$$

$$A_{r+2}^2(x, t) \leq A_r(x, t)A_{r+4}(x, t) = 0 \quad r \geq 2$$

Así, se tiene que, como $A_n(x, t) < \infty$

$$\left. \begin{array}{l} A_{r-2}(x, t) = 0 \\ A_{r-1}(x, t) = 0 \\ A_{r+1}(x, t) = 0 \\ A_{r+2}(x, t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{r-2}(x, t) = A_{r-1}(x, t) = A_{r+1}(x, t) = A_{r+2}(x, t) = 0$$

Por lo tanto, $A_n(x, t) = 0 \quad \forall n \geq r$.

Además, para $n < r$, $A_{r-1}^2(x, t) \leq A_{r-2}(x, t)A_r(x, t)$ con $r \geq 4$, lo cual no dice que el menor valor de n para el cual $A_n(x, t) = 0$ debe ser 3. \square

Bajo las hipótesis del teorema de Pawula, se tiene que las ecuaciones cinéticas se transforman en las siguientes:

- Adelantada o de Fokker-Plank:

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial x} [A_1(x, t)f(x, t|y, s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x, t)f(x, t|y, s)] \quad (1.4)$$

- Atrasada o de Kolmogorov:

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial y} + \frac{A_2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|y, s)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de difusión.

Continuemos, por tanto, dando una definición de proceso de difusión.

1.4. Definición de proceso de difusión

Definición 1.4.1. *Se define $\{X(t) : T_0 \leq t \leq T\}$ como un proceso de difusión si es un proceso de Markov en tiempo continuo y con espacio de estados continuo, si tiene trayectorias continuas casi seguro y si $\forall \epsilon > 0$ y $\forall x$ se verifica que:*

1.-

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} F(dy, t+h|x, t) = 0$$

2.- Existen funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ tales que

a.-

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x) F(dy, t+h|x, t) = A_1(x, t)$$

b.-

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^2 F(dy, t+h|x, t) = A_2(x, t)$$

donde $F(x, t|y, s)$ es la función de distribución de transición.

Notemos que la primera de las condiciones significa que grandes cambios en un corto espacio de tiempo son poco probables, es decir, no puede haber saltos grandes (saltos mayores de ϵ), ya que no puedo pasar del estado x al estado y con ninguna probabilidad siempre y cuando esa distancia sea relativamente grande.

Nota 1.4.1. *Destacar que las funciones anteriores $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ no se corresponden exactamente con los momentos infinitesimales definidos anteriormente en el capítulo, sino que son*

los momentos truncados, por unidad de tiempo de los incrementos condicionados, los cuales aseguramos que siempre existen, mientras que para los otros no se tiene asegurada siempre su existencia. Posteriormente se verá que esta denominación de momentos infinitesimales se puede mantener aún en el caso de ser truncados.

Destaquemos también que sólo se han utilizado los dos primeros momentos infinitesimales. Esto se debe a que el resto son nulos. Veámoslo en forma de teorema junto con la demostración.

Teorema 1.4.1. *Los momentos truncados de orden superior a dos son nulos.*

Demostración. Sea $r > 2, \epsilon > 0, \theta > 0, t \in [t_0, T]$ y X pertenecientes al espacio de estados. Entonces, para cualquier $\delta > 0$ se verifica que

$$\begin{aligned}
 & \int_{|y-x| \leq \epsilon} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) = \\
 & = \int_{|y-x| \leq \epsilon, |y-x| \leq \delta} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) + \int_{|y-x| \leq \epsilon, |y-x| > \delta} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) \leq \\
 & \leq \int_{|y-x| \leq \delta} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) + \int_{|y-x| \leq \epsilon, |y-x| > \delta} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) \leq \\
 & \leq \int_{|y-x| \leq \delta} |y-x|^{r-2+2} F(dy, t+h|x, t) + \epsilon^r \int_{|y-x| > \delta} F(dy, t+h|x, t) \leq \\
 & \leq \delta^{r-2} \int_{|y-x| \leq \delta} |y-x|^2 F(dy, t+h|x, t) + \epsilon^r \int_{|y-x| > \delta} F(dy, t+h|x, t) = \\
 & = \delta^{r-2} |A_2(x, t)h + o(h)| + \epsilon^r o(h)
 \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \left(\frac{\theta}{A_2(x, t)} \right)^{\frac{1}{r-2}}$ con $A_2(x, t) \neq 0$ se tiene que

$$\int_{|y-x| \leq \epsilon} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) \leq \theta h + \frac{\theta}{A_2(x, t)} o(h) + \epsilon^r o(h).$$

Por tanto,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) < \theta \quad \forall \theta > 0.$$

Así,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} |y-x|^r F(dy, t+h|x, t) = 0$$

□

Tras estas definiciones, veamos ahora una definición más amplia de procesos de difusión con los momentos infinitesimales. La veremos en forma de teorema.

Teorema 1.4.2. *Sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov en tiempo continuo, con espacio de estados continuo y con trayectorias continuas casi seguro y verificando las siguientes condiciones:*

- *Existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int |y - x|^{2+\delta} F(dy, t + h | x, t) = 0$,*
- *Existen funciones $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ tales que $\forall x$*
 - $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y - x) F(dy, t + h | x, t) = A_1(x, t)$,
 - $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int (y - x)^2 F(dy, t + h | x, t) = A_2(x, t)$.

Entonces, $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ es un proceso de difusión.

Demostración. Las condiciones anteriores implican las dadas anteriormente en la definición de proceso de difusión, ya que para $k = 0, 1, 2$ se verifica

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|>\epsilon} |y-x|^k F(dy, t+h | x, t) &= \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{|y-x|^{2+\delta}}{|y-x|^{2+\delta-k}} F(dy, t+h | x, t) \leq \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^{2+\delta-k}} \int_{|y-x|>\epsilon} |y-x|^{2+\delta} F(dy, t+h | x, t) \leq \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^{2+\delta-k}} \int |y-x|^{2+\delta} F(dy, t+h | x, t) \end{aligned}$$

por lo que, para $k = 0, 1, 2$, se tiene $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|>\epsilon} (y-x)^k F(dy, t+h | x, t) = 0$. Notemos que para $k = 0$ se tiene la primera condición de la definición, mientras que para $k = 1, 2$ se deduce que los momentos infinitesimales coinciden con los truncados. □

1.5. Los procesos de difusión y las ecuaciones de Kolmogorov

El primer objetivo es demostrar que los procesos de difusión tal y como se han definido verifican las ecuaciones de Kolmogorov anteriores. Para ello utilizaremos una serie de teoremas,

los cuales demostraremos a continuación.

En primer lugar comenzaremos con demostrar que los procesos de difusión verifican la ecuación atrasada de Kolmogorov (1.5) y posteriormente la adelantada (1.4).

Teorema 1.5.1. *Sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión. Supongamos que para cada (x, t) , $F(x, t | y, s)$ es dos veces derivable respecto de y , siendo dichas derivadas continuas y acotadas. Entonces $F(x, t | y, s)$ es derivable respecto a s y verifica la ecuación atrasada de Kolmogorov (1.5)*

$$\frac{\partial F(x, t | y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial F(x, t | y, s)}{\partial y} + \frac{A_2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 F(x, t | y, s)}{\partial y^2} = 0, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición

$$\lim_{s \uparrow t} F(x, t | y, s) = \lim_{s \uparrow t} P[X(t) \leq x | X(s) = y] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}.$$

Demostración. El proceso es de Markov, por lo tanto la función F verifica la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$F(x, t | y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t | z, \tau) F(dz, \tau | y, s)$$

donde τ es un instante de tiempo con $s < \tau < t$. Tomando $\tau = s + h$ se tendrá

$$\begin{aligned} F(x, t | y, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t | z, s + h) F(dz, s + h | y, s) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, t | y, s + h) + F(x, t | z, s + h) - F(x, t | y, s + h)] F(dz, s + h | y, s) = \\ &= F(x, t | y, s + h) + \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, t | z, s + h) - F(x, t | y, s + h)] F(dz, s + h | y, s) \end{aligned}$$

Ahora, desarrollamos la función $F(x, t | z, s + h)$ en serie de Taylor respecto de la variable z

y en un entorno de y .

$$\begin{aligned} F(x, t | z, s + h) &= F(x, t | y, s + h) + \frac{\partial F(x, t | y, s + h)}{\partial y} (z - y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x, t | y, s + h)}{\partial y^2} \Big|_{z=\theta} (z - y)^2 = \\ &= F(x, t | y, s + h) + \frac{\partial F(x, t | y, s + h)}{\partial y} (z - y) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F(x, t | y, s + h)}{\partial y^2} + \alpha_\epsilon \right) (z - y)^2 \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_\epsilon = \frac{\partial^2 F(x, t | y, s + h)}{\partial z^2} \Big|_{z=\theta} - \frac{\partial^2 F(x, t | y, s + h)}{\partial y^2},$$

siendo $|\theta - y| \leq |z - y| \leq \epsilon$. Con ello, tenemos

$$\begin{aligned} F(x, t | y, s) &= F(x, t | y, s + h) + \int_{|z-y|>\epsilon} [F(x, t | z, s + h) - F(x, t | y, s + h)] F(dz, s + h | y, s) + \\ &\quad + \int_{|z-y|\leq\epsilon} [F(x, t | z, s + h) - F(x, t | y, s + h)] F(dz, s + h | y, s) = \\ &= F(x, t | y, s + h) + \int_{|z-y|>\epsilon} [F(x, t | z, s + h) - F(x, t | y, s + h)] F(dz, s + h | y, s) + \\ &\quad + \int_{|z-y|\leq\epsilon} \left[\frac{\partial F(x, t | y, s + h)}{\partial y} (z - y) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F(x, t | y, s + h)}{\partial y^2} + \alpha_\epsilon \right) (z - y)^2 \right] \times \\ &\quad \times F(dz, s + h | y, s) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{F(x, t | y, s) - F(x, t | y, s + h)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} [F(x, t | z, s + h) - F(x, t | y, s + h)] F(dz, s + h | y, s) + \\ &\quad + \frac{1}{h} \frac{\partial F(x, t | y, s + h)}{\partial y} \int_{|z-y|\leq\epsilon} (z - y) F(dz, s + h | y, s) + \\ &\quad + \frac{1}{2h} \frac{\partial^2 F(x, t | y, s + h)}{\partial y^2} \int_{|z-y|\leq\epsilon} (z - y)^2 F(dz, s + h | y, s) + \\ &\quad + \frac{1}{2h} \int_{|z-y|\leq\epsilon} \alpha_\epsilon (z - y)^2 F(dz, s + h | y, s) = \\ &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que

- $|C_1| \leq \frac{2}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} F(dz, s + h | y, s)$, por lo que $\lim_{h \downarrow 0} C_1 = 0$

- $\lim_{h \downarrow 0} C_2 = \frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial y} A_1(y,s)$, por la continuidad de la parcial de F respecto de y .
- $\lim_{h \downarrow 0} C_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x,t|y,s)}{\partial y^2} A_2(y,s)$, por la continuidad de la parcial segunda de F respecto de y dos veces.
- Sea $M_\epsilon = \text{Sup}_{|z-y| \leq \epsilon} \left| \frac{\partial^2 F(x,t|y,s+h)}{\partial z^2} \Big|_{z=\theta} - \frac{\partial^2 F(x,t|y,s+h)}{\partial y^2} \right|$, supremo que existe y es finito ya que las parciales segundas son acotadas. Además, si ϵ tiende a cero, entonces z tiende a y , y con ello M_ϵ tiende a cero por la continuidad de las parciales segundas. Con todo ello $|C_4| \leq \frac{M_\epsilon}{2h} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y)^2 F(dz, s+h | y, s)$ y por lo tanto existe el límite de C_4 cuando h tiende a cero.

Con todas estas consideraciones se verifica que existe el límite de $\frac{F(x,t|y,s) - F(x,t|y,s+h)}{h}$ cuando h tiende a cero, límite que será, obviamente, $-\frac{\partial F(x,t|y,s)}{\partial y}$. Además

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x,t | y, s) - F(x,t | y, s+h)}{h} - \frac{1}{h} \frac{\partial F(x,t | y, s+h)}{\partial y} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y) F(dz, s+h | y, s) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2h} \frac{\partial^2 F(x,t | y, s+h)}{\partial y^2} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y)^2 F(dz, s+h | y, s) \right| \leq \\ & \leq \frac{2}{h} \int_{|z-y| > \epsilon} F(dz, s+h | y, s) + \frac{M_\epsilon}{2h} \int_{|z-y| \leq \epsilon} \alpha_\epsilon (z-y)^2 F(dz, s+h | y, s) \end{aligned}$$

El resultado se concluye sin más que hacer tender h , y después ϵ , a cero. Por otra parte, la condición inicial es inmediata ya que en el límite cuando s tiende a t tenemos una variable degenerada en y . □

Notar que en el caso de existir las densidades de transición, se verifica la ecuación atrasada para ellas y con condición inicial

$$\lim_{s \uparrow t} f(x, t | y, s) = \delta(x - y),$$

ya que la función delta de Dirac ¹ es la derivada de la función de distribución $F(x, t | y, t)$.

¹La función delta de Dirac ($\delta(t)$) viene definida por las siguientes propiedades:

- $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Hemos establecido la ecuación diferencial atrasada para la función de distribución de transición y para las densidades de transición en el caso de que existan, pero dicha ecuación puede generalizarse a una clase más amplia de funciones. Así pues, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.5.2. *Sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión. Sea ψ una función acotada y continua tal que $u(y, s) = \int \psi(x)F(dx, t | y, s)$ tenga primera y segunda derivadas continuas y acotadas respecto a y . Entonces la función u tiene derivada respecto de s para $s < t$ e $y \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación*

$$\frac{\partial u(y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial u(y, s)}{\partial y} + \frac{A_2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 u(y, s)}{\partial y^2} = 0, \quad t_0 < s < t < T$$

con la condición de frontera $\lim_{s \uparrow t} u(y, s) = \psi(y)$.

Demostración. Sean $s < \tau < t$. Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tendrá

$$u(y, s) = \int \psi(x)F(dx, t | y, s) = \int \psi(x) \int F(dx, t | z, \tau)F(dz, \tau | y, s) = \int u(z, \tau)F(dz, \tau | y, s)$$

y tomando $\tau = s + h$ entonces $u(y, s) = \int u(z, s + h)F(dz, s + h | y, s)$. Ahora desarrollamos por Taylor la función u como función sólo de z en un entorno de y , o sea

$$\begin{aligned} u(z, s + h) &= u(y, s + h) + \frac{\partial u(y, s + h)}{\partial y}(z - y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(y, s + h)}{\partial z^2} \Big|_{z=\theta} (z - y)^2 = \\ &= u(y, s + h) + \frac{\partial u(y, s + h)}{\partial y}(z - y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(y, s + h)}{\partial y^2} (z - y)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(z, s + h)}{\partial z^2} \Big|_{z=\theta} - \frac{\partial^2 u(y, s + h)}{\partial y^2} \right] (z - y)^2 \end{aligned}$$

donde $|\theta - y| < |z - y| \leq \epsilon$. Llamemos ahora $\alpha_\epsilon = \frac{\partial^2 u(z, s + h)}{\partial z^2} \Big|_{z=\theta} - \frac{\partial^2 u(y, s + h)}{\partial y^2}$ que, obviamente, dependerá del entorno $|z - y| \leq \epsilon$. Con ello

$$u(z, s + h) = u(y, s + h) + \frac{\partial u(y, s + h)}{\partial y}(z - y) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u(y, s + h)}{\partial y^2} + \alpha_\epsilon \right) (z - y)^2$$

▪ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Así pues

$$\begin{aligned} u(y, s) &= \int u(z, s+h)F(dz, s+h | y, s) = \int [u(z, s+h) - u(y, s+h) + u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) = \\ &= u(y, s+h) + \int [u(z, s+h) - u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{u(y, s) - u(y, s+h)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} [u(z, s+h) - u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{|z-y|\leq\epsilon} [u(z, s+h) - u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) = \\ &= \frac{1}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} [u(z, s+h) - u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{|z-y|\leq\epsilon} \left[\frac{\partial u(y, s+h)}{\partial y} (z-y) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u(y, s+h)}{\partial y^2} + \alpha_\epsilon \right) (z-y)^2 \right] F(dz, s+h | y, s) \end{aligned}$$

Ahora bien

- Sea $N = \text{Sup}_{|z-y|>\epsilon} |u(z, s+h) - u(y, s+h)| < \infty$ (pues ψ está acotada, lo cual hace que u también lo esté). Entonces

$$\left| \frac{1}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} [u(z, s+h) - u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) \right| \leq \frac{N}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} F(dz, s+h | y, s)$$

por lo que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|z-y|>\epsilon} [u(z, s+h) - u(y, s+h)]F(dz, s+h | y, s) = 0$$

- $\lim_{h \downarrow 0} \frac{\partial u(y, s+h)}{\partial y} \frac{1}{h} \int_{|z-y|\leq\epsilon} (z-y)F(dz, s+h | y, s) = \frac{\partial u(y, s)}{\partial y} A_1(y, s)$, por la continuidad de la parcial de u respecto de y .
- $\lim_{h \downarrow 0} \frac{\partial^2 u(y, s+h)}{\partial y^2} \frac{1}{h} \int_{|z-y|\leq\epsilon} (z-y)^2 F(dz, s+h | y, s) = \frac{\partial^2 u(y, s)}{\partial y^2} A_2(y, s)$, por la continuidad de la parcial segunda de u respecto de y dos veces.
- Sea $M_\epsilon = \text{Sup}_{|z-y|\leq\epsilon} \left| \frac{\partial^2 u(z, s+h)}{\partial z^2} \Big|_{z=\theta} - \frac{\partial^2 u(y, s+h)}{\partial y^2} \right|$, supremo que existe y es finito ya que las

parciales segundas son acotadas. Además, si ϵ tiende a cero, entonces z tiende a y y con ello M_ϵ tiende a cero por la continuidad de las parciales segundas. Con todo ello

$$\left| \frac{1}{2h} \int_{|z-y| \leq \epsilon} \alpha_\epsilon(z-y)^2 F(dz, s+h | y, s) \right| \leq \frac{M_\epsilon}{2h} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y)^2 F(dz, s+h | y, s)$$

y por lo tanto existe el límite de cuando h tiende a cero.

Con todas estas consideraciones se verifica que existe el límite de $\frac{u(y,s)-u(y,s+h)}{h}$ cuando h tiende a cero, límite que será, obviamente, $-\frac{\partial u(y,s)}{\partial s}$. Además

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(y,s) - u(y,s+h)}{h} - \frac{1}{h} \frac{\partial u(y,s+h)}{\partial y} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y) F(dz, s+h | y, s) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2h} \frac{\partial^2 u(y,s+h)}{\partial y^2} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y)^2 F(dz, s+h | y, s) \right| \leq \\ & \leq \frac{N}{h} \int_{|z-y| > \epsilon} F(dz, s+h | y, s) + \frac{M_\epsilon}{2h} \int_{|z-y| \leq \epsilon} \alpha_\epsilon(z-y)^2 F(dz, s+h | y, s) \end{aligned}$$

La ecuación en derivadas parciales buscada se obtiene haciendo tender primero h a cero (y teniendo en cuenta la continuidad de las derivadas) y luego haciendo tender ϵ a cero.

Por otro lado, como ψ es continua, $\forall \eta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $|x-y| < \epsilon$ entonces $|\psi(x) - \psi(y)| < \eta$. Así pues, sea $\eta > 0$ y $\epsilon > 0$ dado por la continuidad de ψ . Además, como ψ está acotada, entonces $\int_{|x-y| > \epsilon} [\psi(x) - \psi(y)] F(dx, t | y, s)$ es un infinitésimo de orden $t-s$. Con ello

$$\begin{aligned} u(y,s) &= \int \psi(x) F(dx, t | y, s) = \int [\psi(y) + \psi(x) - \psi(y)] F(dx, t | y, s) = \\ &= \psi(y) + \int [\psi(x) - \psi(y)] F(dx, t | y, s) = \psi(y) + \int_{|x-y| \leq \epsilon} [\psi(x) - \psi(y)] F(dx, t | y, s) + \\ &+ \int_{|x-y| > \epsilon} [\psi(x) - \psi(y)] F(dx, t | y, s) = \\ &= \psi(y) + \int_{|x-y| \leq \epsilon} [\psi(x) - \psi(y)] F(dx, t | y, s) + o(t-s) \end{aligned}$$

y así $|u(y,s) - \psi(y)| \leq \int_{|z-y| \leq \epsilon} |\psi(x) - \psi(y)| F(dx, t | y, s) + o(t-s) \leq \eta + o(t-s)$. Haciendo tender s a t tendremos que $\lim_{s \uparrow t} |u(y,s) - \psi(y)| < \eta$, pero como esto es cierto para todo $\eta > 0$

se concluye este teorema. □

A continuación comprobaremos que los procesos de difusión verifican la ecuación adelantada, para lo cual exigiremos la existencia de las densidades de transición.

Teorema 1.5.3. *Sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión. Supongamos que existen la derivadas $\frac{\partial f(x,t|y,s)}{\partial t}$, $\frac{\partial [A_1(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 [A_2(x,t)f(x,t|y,s)]}{\partial x^2}$ y son continuas. Entonces $f(x,t | y, s)$ verifica la ecuación adelantada de Kolmogorov o ecuación de Fokker-Planck*

$$\frac{\partial f(x,t | y, s)}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x,t)f(x,t | y, s)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x,t)f(x,t | y, s)]}{\partial x^2}, t_0 < s < t < T$$

con la condición $\lim_{t \rightarrow s} f(x,t | y, s) = \delta(x - y)$.

Demostración. Sea g una función de tipo Schwartz y consideremos $M(t | y, s) = E[g(X(t)) | X(s) = y]$. Entonces, usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov, se verifica

$$\begin{aligned} M(t+h | y, s) &= \int g(x)f(x, t+h | y, s)dx = \int g(x) \left(\int f(x, t+h | z, t)f(z, t | y, s)dz \right) dx = \\ &= \int \left(\int [g(x) - g(z) + g(z)]f(x, t+h | z, t)dx \right) f(z, t | y, s)dz = \\ &= M(t | y, s) + \int \left(\int [g(x) - g(z)]f(x, t+h | z, t)dx \right) f(z, t | y, s)dz \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{M(t+h | y, s) - M(t | y, s)}{h} = \int \left(\int \frac{g(x) - g(z)}{h} f(x, t+h | z, t)dx \right) f(z, t | y, s)dz$$

Ahora bien, como g es infinitamente derivable podemos desarrollarla en un entorno de z

$$g(x) = g(z) + g'(z)(x - z) + \frac{1}{2}g''(z)(x - z)^2 + \frac{1}{2}\alpha_\epsilon(x - z)^2$$

donde $\alpha_\epsilon = g''(\theta) - g''(z)$, siendo $|\theta - z| \leq |x - z| \leq \epsilon$. Con ello tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{g(x) - g(z)}{h} f(x, t + h | z, t) dx &= \int_{|x-z| > \epsilon} \frac{g(x) - g(z)}{h} f(x, t + h | z, t) dx + \\ &+ \frac{g'(z)}{h} \int_{|x-z| > \epsilon} (x - z) f(x, t + h | z, t) dx + \\ &+ \frac{g''(z)}{2h} \int_{|x-z| > \epsilon} (x - z)^2 f(x, t + h | z, t) dx + \\ &+ \frac{1}{2h} \int_{|x-z| > \epsilon} \alpha_\epsilon (x - z)^2 f(x, t + h | z, t) dx \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que g es una función de tipo Schwartz, en particular estará acotada. Por lo tanto, siguiendo un razonamiento análogo al de los teoremas anteriores se concluye

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t | y, s)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int g(x) f(x, t | y, s) dx = \int g(x) \frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} dx = \\ &= \int \left[g'(z) A_1(z, t) + \frac{1}{2} g''(z) A_2(z, t) \right] f(z, t | y, s) dz \end{aligned}$$

Integrando por partes en el segundo miembro de la anterior expresión (teniendo en cuenta las características de g al ser de tipo Schwartz), se concluye

$$\int g(x) \frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} dx = \int \left[-\frac{\partial [A_1(z, t) f(z, t | y, s)]}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(z, t) f(z, t | y, s)]}{\partial z^2} \right] g(z) dz$$

Por último, teniendo en cuenta la arbitrariedad de la función g se concluye la demostración sin más que tener en cuenta la continuidad de las derivadas contenidas en el segundo miembro de la expresión. La condición frontera es inmediata. \square

Tengamos en cuenta que en la obtención de las ecuaciones diferenciales anteriores ha hecho falta hacer algunas suposiciones sobre las probabilidades de transición. Pero, si no las conocemos, ¿cómo podemos realizar dichas suposiciones? La respuesta a esta pregunta viene dada en términos de los momentos infinitesimales, ya que estos determinan al proceso de difusión. En particular tenemos el siguiente resultado, el cual no demostraremos.

Teorema 1.5.4. *Supongamos que los momentos infinitesimales A_1 y A_2 verifican, para todo valor x del espacio de estados y $\forall t \in [t_0, T]$, las siguientes condiciones:*

1. Existen unas constantes positivas σ_0 y k tales que

- $|A_1(x, t)| \leq k\sqrt{1 + x^2}$
- $0 < \sigma_0 \leq \sqrt{A_2(x, t)} \leq k\sqrt{1 + x^2}$

2. (Condición de Hölder). Existen constantes positivas γ y k tales que

- $|A_1(x, t) - A_1(y, t)| \leq k|x - y|^\gamma$.
- $\left| \sqrt{A_2(x, t)} - \sqrt{A_2(y, t)} \right| \leq k|x - y|^\gamma$

Entonces se verifica:

- La ecuación atrasada tiene una única solución sujeta a la condición frontera establecida en el teorema 1.5.1. Además, para $t > s$, $F(x, t | y, s)$ es derivable respecto de x , por lo que admite densidad, que también verificará la ecuación atrasada con condición frontera del tipo delta de Dirac.
- Existe un proceso de Markov $\{X(t) : t \in [t_0, T]\}$ con trayectorias continuas, que verifica las condiciones de proceso de difusión y que tiene por función de distribución de transición $F(x, t | y, s)$.
- Si, además, las condiciones del enunciado son cumplidas por $\frac{\partial A_1(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x}y \frac{\partial^2 A_2(x, t)}{\partial x^2}$, entonces la función $f(x, t | y, s) = \frac{\partial F(x, t | y, s)}{\partial x}$ es la única solución fundamental de la ecuación adelantada.
- Si $\gamma = 1$, entonces $f(x, t | y, s)$ es la densidad de transición de la única solución de la ecuación integral estocástica

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t A_1(X(s), s)ds + \int_{t_0}^t \sqrt{A_2(X(s), s)}dW(s).$$

1.5.1. Condiciones de frontera en el caso homogéneo

Sea $\{X(t) : t \in [t_0, T]\}$ un proceso de difusión homogéneo el cual verifica las ecuaciones diferenciales adelantada (1.4) y atrasada (1.5).

La resolución de estas ecuaciones depende de las condiciones analíticas de los momentos infinitesimales. Si no presentan ningún problema, las ecuaciones están definidas en \mathbb{R} y la función de densidad de transición puede obtenerse resolviendo cualquiera de las ecuaciones con la condición inicial del tipo delta de Dirac. Sin embargo, si los momentos infinitesimales presentan algún problema analítico, no sería suficiente la condición delta de Dirac.

Este problema fue tratado y resuelto por Feller, pero necesitó el uso del siguiente aparato matemático:

Sea $I = (r_1, r_2)$ el intervalo de difusión donde $-\infty \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Supongamos que $A_1(x)$, $A_2(x)$ y $A_2'(x) = \frac{\partial A_2(x)}{\partial x}$ son continuas en $I \forall x \in I$ y que $A_2'(x) > 0 \forall x \in I$. Entonces:

- El proceso nunca alcanza, para t finito, el valor $r_i, i = 1, 2$. En tal caso se dice que r_i es una barrera inaccesible.
- El proceso alcanza, para t finito, el valor $r_i, i = 1, 2$. En tal caso se dice que r_i es una barrera accesible.

Para estos casos podemos detallar más su clasificación, tal y como sigue.

- Barreras inaccesibles
 - Barreras naturales: En este caso no hay flujo de probabilidad desde el interior del intervalo de difusión a las barreras y si, inicialmente, se asignara alguna masa de probabilidad en la barrera, esa masa permanece en la misma sin propagarse por el intervalo de difusión.
 - Barreras de entrada: No es alcanzable desde el interior del intervalo de difusión pero, partiendo de ella, el proceso puede tomar valores en el intervalo.
- Barreras accesibles

- Barreras regulares: este caso no ocurre nada de particular en el proceso en las proximidades de las barreras. Por lo tanto hay que imponer condiciones en cada una de ellas.
- Barreras de salida: Existe flujo de probabilidad desde el interior del intervalo de difusión hacia la barrera, pero no al revés. En este sentido la barrera de este tipo actúa de forma absorbente puesto que las trayectorias del proceso toman un valor inicial x_0 , donde $r_1 < x_0 < r_2$, y concluyen tan pronto como alcanzan una barrera de este tipo.

Sea $x' \in I$, sean I_i los intervalos de extremos x' y $r_i, i = 1, 2$ y sea $\mathcal{L}(I_i)$ el espacio de funciones no negativas Lebesgue integrables en I_i . Si definimos

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(-\int_{x'}^x \frac{2A_1(z)}{A_2(z)} dz\right) & g(x) &= \frac{2}{A_2(x)f(x)} \\ h(x) &= f(x) \int_{x'}^x g(z) dz & k(x) &= g(x) \int_{x'}^x f(z) dz, \end{aligned}$$

la clasificación anterior se resume en:

- r_i es regular si $f \in \mathcal{L}(I_i)$ y $g \in \mathcal{L}(I_i)$.
- r_i es de salida si $g \notin \mathcal{L}(I_i)$ y $h \in \mathcal{L}(I_i)$.
- r_i es de entrada si $f \notin \mathcal{L}(I_i)$ y $k \in \mathcal{L}(I_i)$.
- r_i es natural en otro caso.

Pongamos un ejemplo sobre dicha clasificación para su mejor comprensión.

Ejemplo 1.5.1. Sea $\{W(t) : t \geq 0\}$ el proceso de Wiener con $A_1(x) = \mu$ y $A_2(x) = \sigma^2$ definido en $I = (r_1, r_2)$. Estudiemos la naturaleza de las barreras del espacio de estados.

Consideremos en primer lugar un $x' \in \mathbb{R}$. Así, se tiene que

$$f(x) = \exp\left(-\int_{x'}^x \frac{2A_1(z)}{A_2(z)} dz\right) = \exp\left(-\int_{x'}^x \frac{2\mu}{\sigma^2} dz\right) = \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x - x')\right)$$

$$g(x) = \frac{2}{A_2(x)f(x)} = \frac{2}{\sigma^2 \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right)} = \frac{2 \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right)}{\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \int_{x'}^x g(z) dz = \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) \int_{x'}^x \frac{2 \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(z-x')\right)}{\sigma^2} dz = \\ &= \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) \left(\frac{\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right)}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= g(x) \int_{x'}^x f(z) dz = \frac{2 \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right)}{\sigma^2} \int_{x'}^x \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(z-x')\right) dz = \\ &= \frac{2 \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right)}{\sigma^2} \frac{-\sigma^2}{2\mu} \left(\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) - 1 \right) = \\ &= \frac{-1}{\mu} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{r_1}^{x''} f(x) dx = \frac{-\sigma^2}{2\mu} \left(\exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x''-x')\right) - \lim_{x \rightarrow r_1} \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{x''} g(x) dx &= \int_{r_1}^{x''} \frac{2 \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right)}{\sigma^2} dx = \frac{1}{\mu} \left(\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x''-x')\right) - \right. \\ &\left. - \lim_{x \rightarrow r_1} \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x-x')\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{x''} h(x) dx &= \int_{r_1}^{x''} \frac{1}{\mu} \left(1 - \exp \left(-\frac{2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) \right) dx = \\
&= \int_{r_1}^{x''} \frac{1}{\mu} dx - \frac{1}{\mu} \int_{r_1}^{x''} \exp \left(\frac{-2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) dx = \\
&= \frac{1}{\mu} \left(x'' - \lim_{x \rightarrow r_1} x \right) + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} \left(\exp \left(-\frac{2\mu}{\sigma^2} (x'' - x') \right) - \lim_{x \rightarrow r_1} \exp \left(-\frac{2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{x''} k(x) dx &= \int_{r_1}^{x''} \frac{-1}{\mu} \left(1 - \exp \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) \right) dx = \\
&= \int_{r_1}^{x''} \frac{-1}{\mu} dx + \frac{1}{\mu} \int_{r_1}^{x''} \exp \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) dx = \\
&= \frac{-1}{\mu} \left(x'' - \lim_{x \rightarrow r_1} x \right) + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} \left(\exp \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} (x'' - x') \right) - \lim_{x \rightarrow r_1} \exp \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) \right)
\end{aligned}$$

Así, se tiene que

- Si $r_1 > -\infty$, entonces $f \in \mathcal{L}(r_1, x')$, $g \in \mathcal{L}(r_1, x')$, por lo tanto, r_1 es regular.
- Si $r_1 = -\infty$, entonces $f \notin \mathcal{L}(r_1, x')$, $g \in \mathcal{L}(r_1, x')$, $h \notin \mathcal{L}(r_1, x')$, $k \notin \mathcal{L}(r_1, x')$, por lo tanto, r_1 es natural.

De igual forma, para $x'' \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{x''}^{r_2} f(x) dx = \frac{-\sigma^2}{2\mu} \left(\lim_{x \rightarrow r_2} \exp \left(\frac{-2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) - \exp \left(\frac{-2\mu}{\sigma^2} (x'' - x') \right) \right)$$

$$\int_{x''}^{r_2} h(x) dx = \frac{1}{\mu} \left(\lim_{x \rightarrow r_2} x - x'' \right) + \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(\lim_{x \rightarrow r_2} \exp \left(\frac{-2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) - \exp \left(\frac{-2\mu}{\sigma^2} (x'' - x') \right) \right)$$

$$\int_{x''}^{r_2} k(x) dx = \frac{-1}{\mu} \left(\lim_{x \rightarrow r_2} x - x'' \right) + \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(\lim_{x \rightarrow r_2} \exp \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} (x - x') \right) - \exp \left(\frac{2\mu}{\sigma^2} (x'' - x') \right) \right)$$

$$\int_{x''}^{r_2} g(x)dx = \frac{1}{\mu} \left(\lim_{x \rightarrow r_2} \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x - x')\right) - \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(x'' - x')\right) \right)$$

Así, se tiene que

- Si $r_2 < +\infty$, entonces $f \in \mathcal{L}(x', r_2), g \in \mathcal{L}(x', r_2)$, por lo tanto, r_2 es regular.
- Si $r_2 = +\infty$, entonces $f \in \mathcal{L}(x', r_2), g \notin \mathcal{L}(x', r_2), h \notin \mathcal{L}(x', r_2), k \notin \mathcal{L}(x', r_2)$, por lo tanto, r_2 es natural.

1.5.2. Resolución de las ecuaciones de Kolmogorov

A continuación, una vez demostrado que los procesos de difusión cumplen las ecuaciones de Kolmogorov, veamos cómo resolverlas. Para ello, veremos distintos métodos, comenzando por la aplicación de la transformada de Laplace.

1.5.2.1. Aplicación de la transformada de Laplace

En este subapartado nos centraremos en la resolución de la ecuación adelantada en el caso homogéneo, la cual es la siguiente:

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A_1(x)f(x, t, x_0, t_0)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[A_2(x)f(x, t|x_0, t_0)].$$

Operando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} &= -A_1'(x)f(x, t, x_0, t_0) - A_1(x)\frac{\partial f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[A_2'(x)f(x, t, x_0, t_0) + A_2(x)\frac{\partial f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x}] = \\ &= A_1'(x)f(x, t, x_0, t_0) - A_1(x)\frac{\partial f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{2}[A_2''(x)f(x, t, x_0, t_0) + A_2'(x)\frac{\partial f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x} + \\ &+ A_2(x)\frac{\partial f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x} + A_2(x)\frac{\partial^2 f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x^2}] \end{aligned}$$

Agrupando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} &= \left[\frac{A_2''(x)}{2} - A_1'(x) \right] f(x, t|x_0, t_0) + [A_2'(x) - A_1(x)] \frac{\partial f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x} + \\ &+ \frac{A_2(x)}{2} \frac{\partial^2 f(x, t, x_0, t_0)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sea

$$f^*(x, s|x_0, t_0) = \mathcal{L}(f(x, t|x_0, t_0)) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(x, t|x_0, t_0) dt, s \in \mathbb{R}$$

la transformada de Laplace de $f(x, t|x_0, t_0)$.

Ahora, apliquemos dicha transformada en (1.6) a ambos miembros, pero previamente debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Sea F una función n veces derivable. Entonces, se tiene que

$$\mathcal{L}(F^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(F)(s) - F(0)s^{n-1} - F'(0)s^{n-2} - \dots - F^{(n-1)}(0).$$

Así, se cumple que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t}\right) = s f^*(x, s|x_0, t_0) - f(x, t|x_0, t_0).$$

$$\text{(el segundo miembro no sería con límite??)} \quad (1.7)$$

- Por otro lado se tiene que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x}\right) = \frac{\partial f^*(x, s|x_0, t_0)}{\partial x}.$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 f^*(x, s|x_0, t_0)}{\partial x^2}.$$

- Definamos $\lim_{t \downarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0)$ como $\lim_{t \downarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$, donde $\delta(t)$ es la denominada función delta de Dirac.

Ahora, teniendo en cuenta los puntos anteriores y aplicando la transformada a ambos miembros

de (1.6) se tiene que

$$sf^*(x, s|x_0, t_0) - \delta(x - x_0) = \frac{1}{2}A_2(x)\frac{\partial^2 f^*(x, s|x_0, t_0)}{\partial x^2} + [A_2'(x) - A_1(x)]\frac{\partial f^*(x, s|x_0, t_0)}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x)\right]f^*(x, s|x_0, t_0)$$

Operando y agrupando se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}A_2(x)\frac{\partial^2 f^*(x, s|x_0, t_0)}{\partial x^2} + [A_2'(x) - A_1(x)]\frac{\partial f^*(x, s|x_0, t_0)}{\partial x} + \\ & + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x) - s\right]f^*(x, s|x_0, t_0) = \delta(x - x_0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

La ecuación (3.1) es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden, que, para resolverla, debemos imponerle condiciones de frontera. La solución proporcionará la transformada de Laplace de la función de densidad. Finalmente, aplicando el teorema de inversión, obtendremos la densidad $f(x, t|x_0, t_0)$.

1.5.2.2. Aplicación de la transformada de Fourier

Centrémonos en la resolución de la ecuación adelantada en el caso homogéneo mediante la aplicación de la transformada de Fourier de la densidad de transición.

$$\mathcal{F}(f(x, t|x_0, t_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x, t|x_0, t_0) dx = \phi(\lambda, t|x_0, t_0)$$

Como se puede observar, esto lleva a la función característica. Sin embargo, en este caso no podemos obtener una expresión genérica de una ecuación diferencial, ya que ahora en la transformación se integra respecto de x .

1.5.2.3. Resolución mediante separación de variables

Nuestro objetivo es la resolución de la ecuación adelantada en el caso homogéneo. En primer lugar denotemos $f(x, t|x_0, t_0) = \Delta(x)T(t)$, donde x_0 y t_0 son valores fijos. Así, se tiene que

$$\frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \Delta(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial x} = \Delta'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t | x_0, t_0)}{\partial x^2} = \Delta''(x)T(t)$$

Sustituyendo en (1.4), se tiene que

$$\Delta(x)T'(t) = \frac{1}{2}A_2(x)\Delta''(x)T(t) + [A_2'(x) - A_1(x)]\Delta'(x)T(t) + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x) \right] \Delta(x)T(t)$$

de donde obtenemos que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{\Delta(x)} \left[\frac{1}{2}A_2(x)\Delta''(x) + [A_2'(x) - A_1(x)]\Delta'(x) + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x) \right] \Delta(x) \right]$$

Podemos observar que el miembro izquierdo depende sólo de t , mientras que el de la derecha depende solamente de x . Como las variables x y t son independientes, ambos miembros serán iguales a una constante, que llamaremos λ . Ello conduce a las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}A_2(x)\Delta''(x) + [A_2'(x) - A_1(x)]\Delta'(x) + \left[\frac{1}{2}A_2''(x) - A_1'(x) \right] \Delta(x) - \lambda\Delta(x) = 0$$

Así, el problema se reduce a resolver las dos anteriores ecuaciones diferenciales. La primera de ellas es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes, cuya solución es

$$T(t) = T(t_0) e^{\lambda(t-t_0)}$$

mientras que la segunda es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables que, junto a la condiciones inicial y frontera, determinan un problema de contorno que tendrá solución para algunos valores de λ .

La solución general es

$$f(x, t | x_0, t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda(x, A_n, B_n, \lambda_n) e^{\lambda_n t}$$

donde A_n y B_n se determinan a partir de las condiciones inicial y frontera.

1.5.2.4. Transformaciones al proceso Wiener

En esta sección se la procederá a la resolución de la ecuación atrasada o de Kolmogorov mediante la búsqueda de una función que transforme dicha ecuación en la del proceso Wiener estándar, cuya solución es conocida.

Sea $\{X(t) : t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con media $A_1(x, t)$ y varianza infinitesimal $A_2(x, t)$ definido sobre un intervalo I . Sea $\{X(t') : t' \geq t'_0\}$ el proceso de Wiener estándar, el cual tiene media cero y varianza 1. Sea f la densidad de transición del proceso $X(t)$ y f' la del proceso Wiener.

Buscamos transformaciones que cambien la ecuación atrasada (1.5) del proceso de difusión $X(t)$ en la del proceso de Wiener, la cual es

$$\frac{\partial f'(x', t' | x'_0, t'_0)}{\partial t'_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f'(x', t' | x'_0, t'_0)}{\partial (x'_0)^2} = 0$$

cuya solución es

$$f'(x', t' | x'_0, t'_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t' - t'_0)}} \exp\left(-\frac{(x' - x'_0)^2}{2(t' - t'_0)}\right).$$

Las transformaciones buscadas son del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x, t) & x'_0 &= \Psi(x_0, t_0) \\ t' &= \Phi(t) & t'_0 &= \Phi(t_0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

El problema surge en cuándo se podrá transformar un proceso de difusión cualquiera en el de Wiener. Fueron Cherkasov (1957) y Ricciardi (1976) estudiaron con detalle este problema, dando condiciones necesarias y suficientes para que exista tal tipo de transformación. Así, se llega al siguiente teorema.

Teorema 1.5.5. *Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función de densidad de transición $f(x, t | x_0, t_0)$ y momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ pueda transformarse al proceso Wiener estándar es que existan funciones arbitrarias $C_1(t)$ y*

$C_2(t)$ que verifiquen

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{A_2(x, t)}}{2} \left(C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial y} dy}{\sqrt{(A_2(y, t))^3}} dy \right). \quad (1.10)$$

En este caso, la transformación que se realiza es

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x, t) = \sqrt{k_1} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds \right) \int_z^x \frac{1}{\sqrt{A_2(y, t)}} dy - \\ &\quad - \frac{\sqrt{k_1}}{2} \int_{t_2}^t C_1(s) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_2 \\ t' &= \Phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t \exp \left(-\int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_3 \end{aligned}$$

siendo z un valor del intervalo de definición del proceso, $t_1 \in [0, +\infty)$ y k_1, k_2 y k_3 constantes arbitrarias, con k_1 mayor que cero.

Ejemplo 1.5.2. Sea $\{X(t) : t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con media infinitesimal $A_1(x, t) = h(t)x$, siendo h una función continua, y con varianza infinitesimal $A_2(x) = \sigma^2 x^2$, con $x > 0$ y $\sigma^2 > 0$. Veamos si este proceso verifica la condición para ser transformado al proceso Wiener estándar.

Tenemos que, por (1.10),

$$\begin{aligned} h(t)x &= \frac{2\sigma^2 x}{4} + \frac{\sigma x}{2} C_1(t) + \frac{\sigma x}{2} \int_z^x \frac{C_2(t) \sigma^2 y^2}{\sigma^3 y^3} dy = \\ &= \frac{\sigma^2 x}{2} + \frac{\sigma C_1(t) x}{2} + \frac{C_2(t) x}{2} \int_z^x \frac{1}{y} dy = \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma C_1(t)}{2} + \frac{C_2(t)}{2} \log \left(\frac{x}{z} \right) \right) x \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$h(t) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma C_1(t)}{2} + \frac{C_2(t)}{2} \log \left(\frac{x}{z} \right).$$

$$h(t) = \frac{\sigma}{2} (\sigma + C_1(t)) + \frac{C_2(t)}{2} \log \left(\frac{x}{z} \right).$$

Así, para que se verifique la condición anterior, basta con tomar $C_1(t) = \frac{2h(t)}{\sigma} - \sigma$ y $C_2(t) = 0$.

Así, las transformaciones que llevan al proceso de Wiener son

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x, t) = \frac{\sqrt{k_1}}{\sigma} \int_z^x \frac{1}{y} dy - \frac{\sqrt{k_1}}{2} \int_{t_2}^t \left(\frac{2h(s)}{\sigma} - \sigma \right) ds + k_2 = \\ &= \sqrt{k_1} \left(\frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{x}{z} \right) - \frac{1}{\sigma} \int_{t_2}^t h(s) ds + \frac{\sigma}{2} (t - t_2) + k_2 \right) \end{aligned}$$

$$t' = \Phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t ds + k_3 = k_1(t - t_1) + k_3$$

Así, como $\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} = \frac{\sqrt{k_1}}{\sigma x}$, la densidad de transición del proceso es

$$\begin{aligned} f(x, t | y, s) &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma x} f'(x', t' | y', s') = \frac{k_1^{1/2}}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-s')}} \exp \left(-\frac{(x' - y')^2}{2(t-s')} \right) = \\ &= \frac{k_1^{1/2}}{x \sqrt{2\pi\sigma^2 k_1(t-s)}} \exp \left(-\frac{\left(k_1^{1/2} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\ln \left(\frac{x}{z} \right) - \ln \left(\frac{y}{z} \right) - \int_s^t h(\lambda) d\lambda \right) + \frac{\sigma}{2}(t-s) \right) \right)^2}{2k_1(t-s)} \right) = \\ &= \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2(t-s)} \left(\ln \left(\frac{x}{y} \right) - \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t-s) \right)^2 \right), \end{aligned}$$

es decir, para $t > s$

$$X(t) | X(s) = y \sim \Lambda_1 \left(\ln(y) + \int_s^t h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t-s), \sigma^2(t-s) \right).$$

A partir de la expresión anterior se puede calcular la función de distribución de transición

$$F(x, t | y, s) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\ln(x/y) - \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)}{\sqrt{2\sigma^2(t-s)}} \right) \right]$$

donde $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

El proceso de difusión del ejemplo anterior $X(t)$ se corresponde con el proceso logarítmico normal con factores exógenos.

1.5.2.5. Método de la factorización de densidades

El objetivo es buscar y estudiar las condiciones que se tienen que dar para que un proceso de difusión $X(t)$ definido en $I = (r_1, r_2)$ con función de densidad de transición $f(x, t|x_0, t_0)$ se obtenga a partir de la función de densidad de transición $\phi(x, t|x_0, t_0)$ de un proceso de difusión $\{Y(t) : t \geq t_0\}$ con media infinitesimal $\alpha(x, t)$, varianza infinitesimal $\alpha(x, t)$ y función de distribución de transición Φ de la forma

$$f(x, t|x_0, t_0) = k(x, t)h(x_0, t_0)\phi(x, t|x_0, t_0) \quad (1.11)$$

con k y h funciones apropiadas.

Teorema 1.5.6. *La función $f(x, t|x_0, t_0)$ dada de la forma (1.11) satisface la ecuación de Kolmogorov (1.5), la ecuación de Fokker-Planck (1.4) y la condición inicial $\lim_{t \downarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ si*

$$h(x, t) = (k(x, t))^{-1} \quad (1.12)$$

$$A_1(x, t) = \alpha_1(x, t) + \frac{1}{k(x, t)} \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \alpha_2(x, t) \quad (1.13)$$

$$A_2(x, t) = \alpha_2(x, t) \quad (1.14)$$

y

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + \alpha_1(x, t) \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_2(x, t) \frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.15)$$

donde $k(x, t)$ es una función continua que no cambia de signo en $I \times [t_0, +\infty)$.

Ejemplo 1.5.3. *Sea $\{Y(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso lognormal homogéneo con media infinitesimal $\alpha_1(x, t) = mx, m \in \mathbb{R}$ y varianza infinitesimal $\alpha_2(x, t) = \sigma^2 x^2$, definido en $I = \mathbb{R}^+$. Consideremos $\{X(t) : t \geq t_0 > 0\}$ el proceso de difusión definido en $I = \mathbb{R}^+$ y con momentos infinitesimales $A_1(x, t) = x \left(\frac{\log(x)}{t} + \frac{\sigma^2}{2} \right)$ y $A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$. Comprobar si la función de densidad de transición del proceso $\{X(t)\}$ puede obtenerse a partir de la de $\{Y(t)\}$ por el método de la factorización de las densidades. En caso afirmativo, obtener tal densidad de transición.*

Por (1.13) se tiene que

$$k(x, t) = \exp \left(\int \frac{A_1(x, t) - \alpha_1(x, t)}{\alpha_2(x, t)} dx \right).$$

Así, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} k(x, t) &= \exp \left(\int \frac{x \left(\frac{\log(x)}{t} + \frac{\sigma^2}{2} \right) - mx}{\sigma^2 x^2} dx \right) = \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\int \frac{\log(x)}{tx} + \frac{\sigma^2}{2x} - \frac{m}{x} dx \right) \right) = \\ &= V(t) \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - (m - \sigma^2/2) \log(x) \right) \right). \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial k(x, t)}{\partial t} &= V'(t) \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - (m - \sigma^2/2) \log(x) \right) \right) + \\ &\quad + V(t) \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - (m - \sigma^2/2) \log(x) \right) \right) \left(\frac{-\log^2(x)}{2\sigma^2 t^2} \right) \\ \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} &= V(t) \exp \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - (m - \sigma^2/2) \log(x) \right) \frac{\log(x) - (m - \sigma^2/2)t}{\sigma^2 tx} \\ \frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial x^2} &= V(t) \exp \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - (m - \sigma^2/2) \log(x) \right) \frac{\log(x) - (m - \sigma^2/2)t}{\sigma^2 tx} + \\ &\quad + V(t) \exp \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - (m - \sigma^2/2) \log(x) \right) \frac{1 - \log(x) + (m - \sigma^2/2)t}{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (1.15) y operando se llega a que

$$\frac{V'(t)}{V(t)} + \frac{1}{2t} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 = 0,$$

de donde, resolviendo la ecuación diferencial anterior, se tiene que

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left(\frac{1}{2\sigma^2} \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 t \right).$$

Así pues, la función

$$k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 t\right) \exp\left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\log^2(x)}{2t} - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right) \log(x)\right)\right)$$

verifica las condiciones del teorema que asegura que su densidad de transición puede obtenerse mediante la factorización de densidades.

El proceso de difusión lognormal

Podemos obtener el proceso de difusión lognormal de tres maneras distintas: por medio de esquemas discretos, a partir de modelos discretos de crecimiento o mediante modelos continuos de crecimiento.

Nuestro objetivo es llegar a la ecuación de Fokker-Planck, por lo que utilizaremos el primero de los métodos, el cual es un proceso de salto.

2.1. Obtención del proceso mediante esquemas discretos

Sea el caso de un proceso de difusión no homogéneo. El modelo discreto de partida considerado es

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} &= X_{n\tau} + Z_{(n+1)\tau} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

donde $Z_{n\tau}$ son variables aleatorias independientes verificando

$$\begin{aligned} P [Z_{(n+1)\tau} = \delta \mid X_{n\tau} = k\delta] &= \theta(k\delta, n\tau) \\ P [Z_{(n+1)\tau} = -\delta \mid X_{n\tau} = k\delta] &= \phi(k\delta, n\tau) \quad y \\ P [Z_{(n+1)\tau} = 0 \mid X_{n\tau} = k\delta] &= 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau). \end{aligned}$$

Como hemos podido ver, $Z_{n\tau}$ va pegando saltos de amplitud $n\tau$. En el primero de los casos anteriores se da un salto hacia adelante (salto de amplitud δ), en el segundo, un salto hacia atrás (nuevamente salto de amplitud δ) y en el tercero, se queda quieto.

Para obtener el proceso de difusión lognormal no homogéneo, las funciones anteriores θ y ϕ

vienen definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\theta(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 x^2 \tau}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{h(t)x\tau}{\delta} \\ \phi(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 x^2 \tau}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{h(t)x\tau}{\delta}\end{aligned}$$

Así, el esquema de partida, que no será un recorrido aleatorio simple ya que que las variables aleatorias $Z_{n\tau}$ no están idénticamente distribuidas, se convierte en el siguiente:

$$\begin{aligned}X_{(n+1)\tau} &= X_{n\tau} + Z_{n\tau}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ X_0 &= x_0\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}P [Z_{(n+1)\tau} = \delta \mid X_{n\tau} = k\delta] &= \left[\frac{\sigma^2 k^2}{2} + \frac{h(n\tau)k}{2} \right] \tau \\ P [Z_{(n+1)\tau} = -\delta \mid X_{n\tau} = k\delta] &= \left[\frac{\sigma^2 k^2}{2} - \frac{h(n\tau)k}{2} \right] \tau \quad \text{y} \\ P [Z_{(n+1)\tau} = 0 \mid X_{n\tau} = k\delta] &= 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau) = 1 - \sigma^2 k^2 \tau.\end{aligned}$$

Adicionalmente, se han de cumplir las hipótesis siguientes:

- $|h(t)| \leq j\sigma^2, \forall j \in \mathbb{N}$ para que las funciones $\theta(x, t)$ y $\phi(x, t)$ estén bien definidas.
- $\sigma^2 j^2 < \frac{1}{\tau}$ para asegurar que la suma de probabilidades sea menor que uno, es decir, que $\theta(x, t) + \phi(x, t) < 1$.

Para obtener, a partir de este esquema discreto, las ecuaciones de difusión del proceso de difusión lognormal, se toma la siguiente notación,

$$P_{j,k}^{(m,n)} = P [X_{(n+m)\tau} = k\delta \mid X_{m\tau} = j\delta]$$

la cual nos dice que estando en el estado $j\delta$ pasa al estado $k\delta$ viniendo del instante $m\tau$ al instante $(n+m)\tau$, de forma que se tienen los saltos hacia adelante y hacia atrás, es decir, tenemos la

siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 P_{j,k}^{(m,n)} &= P_{j,k-1}^{(m,n-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k-1)^2 + \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau)(k-1) \right] \tau \\
 &+ P_{j,k+1}^{(m,n-1)} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k+1)^2 - \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau)(k+1) \right] \tau \\
 &+ P_{j,k}^{(m,n-1)} (1 - \sigma^2 k^2 \tau).
 \end{aligned}$$

Entonces, ¿qué ha podido ocurrir? Que en el estado $n-1$ estuviera detrás transcurridos $n-1$ instantes de tiempo, puede que esté detrás en el $(k-1)\delta$ o delante en el $(k+1)\delta$ o en el mismo, es decir, o muevo hacia adelante, o muevo hacia atrás o me estoy quieto.

Sea ahora $f(x, t | y, s)\delta$ la probabilidad instantánea por unidad de tiempo de que el proceso tome un valor en el intervalo $(x \pm \frac{\delta}{2})^1$ en el instante de tiempo t si parte del estado y en el instante de tiempo s . Teniendo entonces en cuenta la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
 f(k\delta, (n+m)\tau | j\delta, m\tau)\delta &= \\
 &= f((k-1)\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k-1)^2 + \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau)(k-1) \right] \tau \\
 &+ f((k+1)\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta \left[\frac{1}{2} \sigma^2 (k+1)^2 - \frac{1}{2} h((n+m-1)\tau)(k+1) \right] \tau \\
 &+ f(k\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta (1 - \sigma^2 k^2 \tau).
 \end{aligned}$$

Tomando $x = k\delta, t = (m+n)\tau, y = j\delta, s = m\tau$ y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
 f(x, t | y, s) &= f(x - \delta, t - \tau | y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x - \delta)^2 + \frac{1}{2\delta} h(t - \tau)(x - \delta) \right] \tau \\
 &+ f(x + \delta, t - \tau | y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x + \delta)^2 - \frac{1}{2\delta} h(t - \tau)(x + \delta) \right] \tau \\
 &+ f(x, t - \tau | y, s) \delta (1 - \sigma^2 x^2 \tau).
 \end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor en x e y y en cada uno de los sumandos del lado derecho de la igualdad

¹Notar que la amplitud debe ser δ , por eso tomamos ese intervalo.

anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
& f(x - \delta, t - \tau | y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x - \delta)^2 + \frac{1}{2\delta} h(t - \tau)(x - \tau) \right] \tau \\
&= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^n \delta^i \tau^j}{i! j!} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{m=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{m} \frac{\partial^{k+m} f(x, t | y, s)}{\partial x^k \partial t^m} \frac{\partial^{n-k-m} \left[\frac{\sigma^2 x^2}{2\delta^2} + \frac{h(t)x}{2\delta} \right] \tau}{\partial x^{i-k} \partial t^{j-m}} \right] \\
& f(x + \delta, t - \tau | y, s) \left[\frac{1}{2\delta^2} \sigma^2 (x + \delta)^2 - \frac{1}{2\delta} h(t - \tau)(x + \delta) \right] \tau \\
&= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^j \delta^i \tau^j}{i! j!} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{m=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{m} \frac{\partial^{k+m} f(x, t | y, s)}{\partial x^k \partial t^m} \frac{\partial^{n-k-m} \left[\frac{\sigma^2 x^2}{2\delta^2} - \frac{h(t)x}{2\delta} \right] \tau}{\partial x^{i-k} \partial t^{j-m}} \right] \\
& f(x, t - \tau | y, s) = \sum_j \frac{(-1)^j \tau^j}{j} \frac{\partial^j f(x, t | y, s)}{\partial t^j}
\end{aligned}$$

Sumando apropiadamente, dividiendo entre τ y haciendo tender τ y δ a cero ($\tau \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$), se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [h(t)x f(x, t | y, s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 f(x, t | y, s)]$$

Ésta es la ecuación adelantada o de Fokker-Planck de un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x, t) = h(t)x$ y $A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$, esto es, la ecuación adelantada asociada al proceso de difusión lognormal no homogéneo.

Siguiendo un desarrollo análogo, se llega a la ecuación atrasada o de Kolmogorov de un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x, t) = h(t)x$ y $A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$, esto es, la ecuación atrasada asociada al proceso de difusión lognormal no homogéneo, la cual es

$$\frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial s} + \frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial y} h(s)y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t | y, s)}{\partial y^2} \sigma^2 y^2 = 0.$$

2.2. Características

2.2.1. Función de densidad de transición

Como ya hemos visto anteriormente en el ejemplo (1.5.2), la función de densidad del proceso es

$$f(x, t | y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{\left[\ln(x/y) - \int_s^t h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right]^2}{2\sigma^2(t-s)}\right),$$

2.2.2. Distribuciones finito-dimensionales

Puesto que el proceso que estamos considerando es markoviano, el cálculo de las distribuciones finito-dimensionales depende únicamente de la distribución inicial y de las transiciones. Conocidas estas últimas, para obtener las distribuciones finito-dimensionales habrá que imponer cuál es la distribución inicial, que supondremos el caso degenerado, es decir, $P[X(t_0) = x_0] = 1$.

2.2.2.1. Distribuciones unidimensionales

En este caso, todas las distribuciones finito-dimensionales son lognormales. En particular, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$,

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T \sim \Lambda_n(\mu, \Sigma)$$

donde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ y $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ son respectivamente

$$\mu_i = E[X_0] + \int_{t_0}^{t_i} h(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t_i - t_0), \quad i = 1, \dots, n$$

y

$$\sigma_{ij} = \text{Var}[X_0] + \sigma_0^2(t_i - t_0), \quad i, j = 1, \dots, n$$

En particular, la distribución de transición del proceso es lognormal univariante, es decir,

$$[X(t) | X(t_0) = x_0] \sim \Lambda_1 \left(\ln x_0 + \int_{t_0}^t h(u) du - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0), (t - t_0)\sigma^2 \right), t_0 < t$$

La distribución coincide con la de $X(t)$ debido a la elección que se ha hecho de la distribución inicial. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x, t | x_0, t_0) = \\ &= \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} \exp \left(- \frac{\left[\ln(x) - \ln(x_0) - \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \right]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right) \end{aligned}$$

2.2.2.2. Distribuciones bidimensionales

Las distribuciones bidimensionales son únicamente la marginal por la condicional. En general, para t y s cualesquiera, la función de densidad bidimensional $f(x, t; y, s)$ será la densidad de una distribución lognormal bidimensional $\Lambda_2(\mu, \Sigma)$ donde

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{pmatrix} \ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) \\ \ln(x_0) + \int_{t_0}^s h(\lambda) d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s - t_0) \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} t - t_0 & t \wedge s - t_0 \\ t \wedge s - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo $t \wedge s = \min(t, s)$.

Consideremos en primer lugar el caso $s < t$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
 f(x, t; y, s) &= f(y, s)f(x, t | y, s) \\
 &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(s-t_0)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln(y) - \ln(x_0) - \int_{t_0}^s h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(s-t_0)\right)^2}{2\sigma^2(s-t_0)}\right) \\
 &\quad \times \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln(x) - \ln(y) - \int_s^t h(\lambda)d\lambda + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) \\
 &= \frac{1}{xy2\pi|\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln(\mathbf{x}) - \mu_1)' \Sigma_1^{-1}(\ln(\mathbf{x}) - \mu_1)\right),
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \ln(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \ln(x) \\ \ln(y) \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} \ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) \\ \ln(x_0) + \int_{t_0}^s h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s-t_0) \end{pmatrix} \\
 \text{y } \Sigma_1 &= \sigma^2 \begin{pmatrix} t-t_0 & s-t_0 \\ s-t_0 & s-t_0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

esto es, la distribución conjunta de $X(t)$ y $X(s)$ es lognormal bidimensional $\Lambda_2(\mu_1, \Sigma_1)$.

De forma análoga, en el caso $t < s$ se tiene que la distribución conjunta es lognormal bidimensional $\Lambda_2(\mu_2, \Sigma_2)$ con

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} \ln(x_0) + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) \\ \ln(x_0) + \int_{t_0}^0 h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s-t_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma_2 = \sigma^2 \begin{pmatrix} t-t_0 & t-t_0 \\ t-t_0 & s-t_0 \end{pmatrix}.$$

Notar que las funciones finito dimensionales para un proceso de Markov se calculan conociendo la bidimensional y la inicial. Ahora, teniendo la densidad de transición, la cual es una condicionada, la multiplicamos por la marginal en x_s . Fijo la distribución inicial (degenerada o lognormal) y supongo distribución lognormal, que es caso más general. Fijando en $X(t_0)$ una lognormal, considerando la de $X(t)$, x_0 en t_0 y poniendo ahí la densidad lognormal en t_0 , haciendo cuentas, nos sale la distribución bidimensional de $X(t)$ y de $X(t_0)$. Esta sería otra forma

de obtener las distribuciones finito-dimensionales.

Ahora, para poder obtener la función media y covarianza, debemos obtener primero los momentos.

2.2.3. Momentos

Una vez conocidos los momentos de una distribución lognormal, los cuales se estudiaron en la asignatura de cálculo y modelización estocástica del máster, como las distribuciones que tengo son lognormales, se tiene que la media de una lognormal $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ es $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$. Por tanto, los momentos de orden k son $e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}}$, es decir,

$$E \left[X(t)^k \right] = e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

$$E \left[X(t)^k \right] = x_0^k \exp \left(k \int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k\sigma^2(t-t_0)}{2} (k-1) \right)$$

Para obtener una expresión de los momentos cruzados, supongamos $s < t$ en los momentos bidimensionales, que son

$$E \left[X(t)^k X(s)^k \right] = e^{k'\mu + \frac{k'\Sigma k}{2}} = e^{k\mu + \frac{k^2\Sigma}{2}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E \left[X(t)^{k_1} X(s)^{k_2} \right] &= E \left[E \left[X(t)^{k_1} X(s)^{k_2} \mid X(s) \right] \right] = E \left[X(s)^{k_2} E \left[X(t)^{k_1} \mid X(s) \right] \right] \\ &= E \left[X(s)^{k_1} X(s)^{k_2} \exp \left(k_1 \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k_1\sigma^2(t-s)}{2} (k_1-1) \right) \right] \\ &= E \left[X(s)^{k_1+k_2} \right] \exp \left(k_1 \int_s^t h(\lambda) d\lambda + \frac{k_1\sigma^2(t-s)}{2} (k_1-1) \right). \end{aligned}$$

Análogamente, cuando $t < s$ se llega a la expresión

$$E \left[X(t)^{k_1} X(s)^{k_2} \right] = E \left[X(t)^{k_1+k_2} \right] \exp \left(k_2 \int_t^s h(\lambda) d\lambda + \frac{k_2\sigma^2(s-t)}{2} (k_2-1) \right)$$

En general, la expresión de los momentos cruzados de órdenes k_1 y k_2 es

$$E \left[X(t \vee s)^{k_1} X(t \wedge s)^{k_2} \right] = E \left[X(t \wedge s)^{k_1+k_2} \right] \times \\ \times \exp \left(k_1 \int_{t \wedge s}^{t \vee s} h(\lambda) d\lambda + \frac{k_1 \sigma^2 (t \vee s - t \wedge s)}{2} (k_1 - 1) \right)$$

2.2.4. Función media y covarianza

Anteriormente hemos visto que la media de una lognormal $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ es $e^{\mu+\sigma^2/2}$, por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$[X(t) \mid X(t_0) = x_0] \sim \Lambda_1 \left(\ln x_0 + \int_{t_0}^t h(u) du - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0), (t - t_0) \sigma^2 \right), t_0 < t$$

y junto con la distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$, se tiene que

$$m(t) = E[X(t)] = E[X(t_0)] \exp \left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda \right),$$

es decir, es el momento de orden 1.

Por otra parte, considerando $k = 2$ y suponiendo la distribución inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$, se puede expresar la función covarianza de la siguiente forma:

$$R(t, s) = \text{Cov}[X(t), X(s)] = x_0^2 \exp \left(\int_{t_0}^t h(\lambda) d\lambda + \int_{t_0}^s h(\lambda) d\lambda \right) \left(e^{\sigma^2(t \wedge s - t_0)} - 1 \right).$$

2.2.5. Función media condicionada

Dado que las distribuciones de $X(t)$ y de $X(t) \mid X(s) = x_s$ son lognormales, se pueden calcular algunas medidas usuales como la media condicionada. En particular, dados s y x_s , se tiene que

$$m(t \mid s) = E[X(t) \mid X(s) = x_s] = x_s \exp \left(\int_a^t h(\lambda) d\lambda \right), t > s \geq t_0.$$

2.2.6. Función moda y de cuantiles

En el caso de distribución degenerada, es decir, $P[X(t_0) = x_0] = 1$ y $\forall t \geq t_0$, se tiene que

$$M_o(t) = \text{Moda}[X(t)] = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda\right) \exp\left(-\frac{3\sigma^2}{2}(t-t_0)\right)$$

$$C_\alpha(t) = \text{Cuantil } \alpha \text{ de}[X(t)] = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma^2(t-t_0)}\right)$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el valor de una normal estándar que deja a la derecha una probabilidad $1 - \alpha$

Notemos que, en todos los casos anteriores, además de la distribución inicial degenerada, podemos suponer una distribución inicial lognormal, es decir, $X(t_0) \sim \Lambda(\mu_0; \sigma_0^2)$. Así, en este caso, se tienen las siguientes características:

- Distribución unidimensional:

$$X(t) \sim \Lambda_1(\mu, \Sigma), \quad \forall t \geq t_0$$

donde

$$\mu = \mu_0 + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)$$

$$\Sigma = \sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2$$

- Distribución bidimensional:

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma), \quad \forall t, s \geq t_0$$

donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 + \int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) \\ \mu_0 + \int_{t_0}^s h(\lambda)d\lambda - \frac{\sigma^2}{2}(s-t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (t \wedge s - t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \\ (t \wedge s - t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

- Función media y covarianza:

$$m(t) = E[X(t)] = E[X(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda\right) = e^{\mu_0 + \sigma_0^2/2} \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda\right)$$

$$R(t, s) = \text{Cov}[X(t), X(s)] = e^{2\mu_0 + \sigma_0^2} \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda + \int_{t_0}^s h(\lambda)d\lambda\right) \left(e^{\sigma^2(t \wedge s - t_0) + \sigma_0^2} - 1\right).$$

- Función moda y de cuantiles:

$$M_o(t) = e^{\mu_0 - \sigma_0^2} \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda\right) \exp\left(-\frac{3\sigma^2}{2}(t - t_0)\right),$$

$$C_\alpha(t) = e^{\mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_0^2}} \exp\left(\int_{t_0}^t h(\lambda)d\lambda\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + z_{1-\alpha} \left[\sqrt{\sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2} - \sqrt{\sigma_0^2}\right]\right).$$

En el siguiente capítulo utilizaremos una notación distinta, por lo que estas características vistas anteriormente las podemos escribir de forma conjunta como sigue:

$$G_\zeta^\lambda(t | y, \tau) = M_\zeta(t | y, \tau)^{\lambda_1} \exp\left(\lambda_2 (\lambda_3 \sigma_0^2 + \sigma^2(t - \tau))^{\lambda_4}\right), \quad (2.1)$$

donde

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$$

y donde

$$M_\zeta(t | y, \tau) = \exp(y + H_\zeta(\tau, t))$$

con

$$H_\zeta(t_0, t) = \int_{t_0}^t h_\theta(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0), \quad \zeta = (\boldsymbol{\theta}^T, \sigma^2)^T.$$

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos para distintos valores de z, τ y λ .

Función	Expresión	z	τ	λ
Momento n-ésimo	$E[X(t)^n]$	μ_0	t_0	$(n, n^2/2, 1, 1)^T$
Momento condicional n-ésimo	$E[X(t)^n X(s) = y]$	$\ln y$	s	$(n, n^2/2, 0, 1)^T$
Moda	$M_o[X(t)]$	μ_0	t_0	$(1, -1, 1, 1)^T$
Moda condicionada	$M_o[X(t) X(s) = y]$	$\ln y$	s	$(1, -1, 0, 1)^T$
Cuantil	$C_\alpha[X(t)]$	μ_0	t_0	$(1, z_\alpha, 1, 1/2)^T$
Cuantil condicionado	$C_\alpha[X(t) X(s) = x_s]$	$\log(x_s)$	s	$(1, z_\alpha, 1, 1/2)^T$

Tabla 2.1: Valores utilizados para obtener el n -ésimo momento y las funciones de moda y cuantil de $G_\zeta^\lambda(t | z, \tau)$.

Notar que, en la tabla anterior, z_α es el cuantil α de una distribución normal estándar.

Inferencia en procesos de difusión

3.1. Estimación por máxima verosimilitud

Sea $\{X(t) : t \geq t_0\}$ un proceso de difusión del que se conocen sus distribuciones unidimensionales y transiciones, y para el cual es posible realizar observaciones del mismo en instantes de tiempo prefijados. Sean t_1, \dots, t_n los instantes de tiempo y sean x_1, \dots, x_n los valores observados de dicho proceso.

Sea f_1 la función de densidad de la variable $X(t_1)$ y sea f la función de densidad de transición. Sean a su vez θ_1 y θ los parámetros asociados a las funciones anteriores. Así, la función de distribución de la muestra observada $x = (x_1, \dots, x_n)'$ es

$$\mathbb{L}_x(\theta_1, \theta) = f_1(x_1) \prod_{x=2}^n f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$$

a partir de la cual se obtendrán los estimadores máximo verosímiles de θ_1 y θ . Así, teniendo en cuenta la muestra observada, se obtienen las estimaciones $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x)$ y $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ tales que

$$\mathbb{L}_x(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}) = \sup_{\theta_1, \theta} \mathbb{L}_x(\theta_1, \theta)$$

Si consideramos d trayectorias observadas en instantes de tiempo t_{ij} ($i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n_i$), y consideramos que $t_{i1} = t_1, i = 1, \dots, d$, se tiene que la función de verosimilitud considerando una distribución no degenerada en t_1 es

$$\mathbb{L}_x(\theta_1, \theta) = \prod_{i=1}^d f_1(x_{i1}) \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1})$$

En otro caso, se tendría

$$\mathbb{L}_x(\theta) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1})$$

Para poder calcular el estimador máximo verosímil, es habitual tomar el logaritmo de la función de verosimilitud, es decir, se consideraría, para el caso de múltiples trayectorias con distribución inicial no degenerada,

$$\log(\mathbb{L}_x(\theta_1, \theta)) = \prod_{i=1}^d \log(f_1(x_{i1})) \prod_{j=2}^{n_i} \log(f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1}))$$

Notar que en el caso de que θ_1 y θ sean independientes, la estimación de ambos también lo será.

3.2. Inferencia en el proceso lognormal

Consideremos un muestreo discreto del proceso, basado en d trayectorias muestrales, en los tiempos t_{ij} con $i = 1, \dots, d$ y $j = 1, \dots, n_i$ y con $t_{i1} = t_0$ para $i = 1, \dots, d$. Denotamos al vector que contiene las variables aleatorias de la muestra como $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^T | \dots | \mathbf{X}_d^T)^T$, donde \mathbf{X}_i^T incluye las variables de la i -ésima muestra de ruteo, que es $\mathbf{X}_i = (X(t_{i1}), \dots, X(t_{i,n_i}))^T$, $i = 1, \dots, d$.

La función de densidad de probabilidad de transición puede obtenerse a partir de la distribución de $(X(s), X(t))^T$, $s < t$, siendo

$$f(x, t | y, s) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{[\ln(x/y) - H_\zeta(s, t)]^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) \quad (3.1)$$

donde $X(t) | X(s) = y$ sigue una distribución lognormal

$$X(t) | X(s) = y \sim \Lambda_1(\ln y + H_\zeta(s, t), \sigma^2(t-s)), s < t$$

donde $H_\zeta(t_0, t) = \int_{t_0}^t h_\theta(u) du - \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0)$ y donde $\zeta = (\theta^T, \sigma^2)^T$ para cualquier θ y para cualquier $h_\theta(t)$ continua, acotada y diferenciable en $I = [t_0, +\infty)$.

Ahora, usando (3.1) y suponiendo que la distribución de $x(t_1)$ es lognormal $\Lambda_1(\mu_1, \sigma_1^2)$, la

función de densidad de \mathbf{X} es

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \frac{\exp\left(-\frac{[\ln x_{i1} - \mu_1]^2}{2\sigma_1^2}\right)}{x_{i1}\sigma_1\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{n_i-1} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(x_{i,j+1}/x_{ij}) - m_{\zeta}^{i,j+1}]^2}{2\sigma^2\Delta_i^{j+1,j}}\right)}{x_{ij}\sigma\sqrt{2\pi\Delta_i^{j+1,j}}}$$

donde $m_{\zeta}^{i,j+1,j} = H_{\zeta}(t_{ij}, t_{i,j+1})$ y $\Delta_i^{j+1,j} = t_{i,j+1} - t_{ij}$.

Consideremos ahora el vector $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_0^T | \mathbf{V}_1^T | \dots | \mathbf{V}_d^T]^T = [\mathbf{V}_0^T | \mathbf{V}_{(1)}^T]^T$, construida a partir de \mathbf{X} mediante el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} V_{0i} &= X_{i1}, i = 1, \dots, d \\ V_{ij} &= \left(\Delta_i^{j+1,j}\right)^{-1/2} \ln \frac{X_{i,j+1}}{X_{ij}}, i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, n_i - 1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta este cambio de variables, la densidad de \mathbf{V} pasa a ser

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} (\ln \mathbf{v}_0 - \mu_1 \mathbf{1}_d)^T (\ln \mathbf{v}_0 - \mu_1 \mathbf{1}_d)\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{v}_{(1)} - \gamma^{\zeta})^T (\mathbf{v}_{(1)} - \gamma^{\zeta})\right)}{\prod_{i=1}^d v_{0i} (2\pi\sigma_1^2)^{\frac{d}{2}} (2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \quad (3.2)$$

con $\ln \mathbf{v}_0 = (\ln v_{01}, \dots, \ln v_{0d})^T$, $n = \sum_{i=1}^d (n_i - 1)$. Aquí, $\mathbf{1}_d$ representa el vector d -dimensional cuyas componentes son todas iguales a uno, mientras que γ^{ζ} es un vector de dimensión n con componentes $\gamma_{ij}^{\zeta} = \left(\Delta_i^{j+1,j}\right)^{-1/2} m_{\zeta}^{i,j,j+1}$, $i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, n_i - 1$.

Así, de (3.2) se obtienen las siguientes conclusiones:

- \mathbf{V}_0 y \mathbf{V}_1 son independientes.
- La distribución de \mathbf{V}_0 es lognormal $\Lambda_d [\mu_1 \mathbf{1}_d; \sigma_1^2 \mathbf{I}_d]$, siendo \mathbf{I}_d la matriz identidad de orden d .
- \mathbf{V}_1 se distribuye como una distribución normal de n variables $N_n [\gamma^{\zeta}; \sigma^2 \mathbf{I}_n]$, siendo \mathbf{I}_n la matriz identidad de orden n .

Supongamos ahora que $\boldsymbol{\eta}$ y ζ son funciones independientes, donde $\boldsymbol{\eta} = (\mu_1, \sigma_1^2)^T$. Entonces,

para un valor fijo \mathbf{v} de la muestra, la función de log-verosimilitud es

$$L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta) = -\frac{(n+d)\ln(2\pi)}{2} - \frac{d\ln\sigma_1^2}{2} - \sum_{i=1}^d \ln v_{0i} - \frac{\sum_{i=1}^d [\ln v_{0i} - \mu_1]^2}{2\sigma_1^2} - \frac{n\ln\sigma^2}{2} - \frac{Z_1 + \Phi_\zeta - 2\Gamma_\zeta}{2\sigma^2}$$

donde

$$Z_1 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{ij}^2 \quad \Phi_\zeta = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{(m_\zeta^{ij+1,j})^2}{\Delta_i^{j+1,j}}, \quad \Gamma_\zeta = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{v_{ij} m_\zeta^{ijj+1,j}}{(\Delta_i^{j+1,j})^{1/2}} \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y también que $\boldsymbol{\eta}$ y ζ son independientes, la estimación máximo verosímil del $\boldsymbol{\eta}$ se obtiene a partir de

$$\frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} = \left(\frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \mu_1}, \frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \sigma_1^2} \right) = \mathbf{0}.$$

Si dicho sistema tiene solución exacta y dicha solución es un máximo, ésta sería una estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso, y, a partir de dicha estimación, utilizando el Teorema de Invarianza de Zehna ¹, obtendríamos estimaciones de las funciones características del proceso que podríamos usar para predecir el valor del proceso en un instante concreto del tiempo. Sin embargo, es usual que este sistema no tenga solución exacta y se tenga que recurrir a métodos numéricos para buscar su aproximación numérica. En algunos casos, si se puede simplificar el sistema hasta llegar a una única ecuación igualada a cero, que dependa sólo de un parámetro, y que se pueda resolver mediante algún método numérico clásico de obtención de raíces como podría ser Newton-Raphson.

Así, se tiene que

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \ln v_{0i} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\ln v_{0i} - \hat{\mu}_1)^2.$$

¹El teorema de invarianza de Zehna nos dice que el estimador máximo verosímil de una función paramétrica es la función paramétrica de los estimadores máximo verosímiles de los parámetros.

Por otro lado, utilizando la siguiente notación,

$$\begin{aligned}\Omega_\zeta &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_1-1} \frac{m_\zeta^{i,j+1,j}}{\Delta_i^{j+1,i}} \frac{\partial m_\zeta^{i,j+1,j}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}, & \Psi_\theta &= \frac{\partial \Gamma_\zeta}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_1-1} \frac{v_{ij}}{(\Delta_i^{j+1,j})^{1/2}} \frac{\partial m_\zeta^{i,j+1,j}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \\ Y_\zeta &= -\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^d m_\zeta^{i,n_1,1}, & Z_2 &= -2 \frac{\partial \Gamma_\zeta}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_1-1} v_{ij} (\Delta_i^{j+1,j})^{1/2}\end{aligned}\quad (3.4)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} &= \frac{1}{\sigma^2} [\Psi_\theta - \Omega_\zeta] \\ \frac{\partial L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{Z_1 + \Phi_\zeta - 2\Gamma_\zeta}{2\sigma^4} - \frac{Z_2 - Y_\zeta}{2\sigma^2}.\end{aligned}$$

Así, la estimación máximo verosímil de ζ se obtiene como solución del siguiente sistema con $k + 1$ ecuaciones:

$$\Psi_\theta - \Omega_\zeta = 0 \quad (3.5)$$

$$Z_1 + \Phi_\zeta - 2\Gamma_\zeta - \sigma^2 Z_2 + \sigma^2 Y_\zeta = n\sigma^2 \quad (3.6)$$

En el caso de que h_θ sea una función lineal en $\boldsymbol{\theta}$, es posible determinar una solución explícita para este sistema de ecuaciones. Sin embargo, en otros casos, la existencia de una solución de forma cerrada no puede garantizarse, por lo que es necesario utilizar procedimientos numéricos para su resolución.

A continuación estudiaremos la distribución de los estimadores de los parámetros y su repercusión en las correspondientes funciones paramétricas relacionadas, que son de interés en distintas aplicaciones.

Es inmediato comprobar que los estimadores de $\boldsymbol{\eta}$ siguen una distribución normal

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 \rightsquigarrow N_1 [\boldsymbol{\mu}_1; \sigma_1^2/d]$$

y que

$$\frac{d\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi_{d-1}^2$$

Si h_θ es lineal podemos calcular las distribuciones exactas asociadas a los estimadores de ζ

lo que nos permite establecer regiones de confianza para los parámetros, así como estimadores insesgados de varianza mínima e intervalos de confianza para combinaciones lineales de θ y σ . Sin embargo, en el caso no lineal, no siempre tenemos una expresión explícita para los estimadores de ζ , por lo que impide obtener, en general, distribuciones exactas para ellos. En ese caso, se pueden utilizar distribuciones asintóticas en su lugar. De hecho, sobre la base de las propiedades de los estimadores máximo verosímiles se sabe que $\hat{\zeta}$ se distribuye asintóticamente distribuida como una distribución normal con media ζ y matriz de covarianza $I(\zeta)^{-1}$, donde $I(\zeta)$ es la matriz de información de Fisher asociada a la muestra completa, la cual es la siguiente:

$$I(\zeta) = -E[H(\zeta)] = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \Xi_\zeta & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y_\zeta}{\partial \theta^T} \right)^T \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial Y_\zeta}{\partial \theta^T} & \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{Z_3}{4} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= \frac{\partial^2 L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \zeta \partial \zeta^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \theta \partial \theta^T} & \left(\frac{\partial^2 L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \sigma^2 \partial \theta^T} \right)^T \\ \frac{\partial^2 L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial \sigma^2 \partial \theta^T} & \frac{\partial^2 L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta}, \zeta)}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \Pi_\zeta - \Xi_\zeta & -\frac{1}{\sigma^2} [\Psi_\theta^T - \Omega_\zeta^T] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y_\zeta}{\partial \theta^T} \right)^T \\ -\frac{1}{\sigma^2} [\Psi_\theta - \Omega_\zeta] + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_\zeta}{\partial \theta^T} & \frac{n}{2\sigma^2} - \frac{Z_1 + \Phi_\zeta - 2\Gamma_\zeta}{\sigma^4} + \frac{Z_2 - Y_\zeta}{\sigma^2} - \frac{Z_3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y donde

$$\begin{aligned} \Pi_\zeta &= \sum_{i=1}^{-d} \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{\partial^2 m_\zeta^{i,j+1,j}}{\partial \theta \partial \theta^T} \left(\Delta_i^{j+1,j} \right)^{-1/2} \left(v_{ij} - \left(\Delta_i^{j+1,j} \right)^{-1/2} m_\zeta^{i,j+1,j} \right) \\ \Xi_\zeta &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \left(\Delta_i^{j+1,j} \right)^{-1} \left(\frac{\partial m_\zeta^{i,j+1,j}}{\partial \theta^T} \right)^T \frac{\partial m_\zeta^{i,j+1,j}}{\partial \theta^T} \\ Z_3 &= \sum_{i=1}^d \Delta_i^{n_i,1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la distribución de la muestra, tenemos que

$$E[\Pi_\zeta] = 0, \quad E[Z_1] = n\sigma^2 + \Phi_\zeta, \quad E[Z_2] = Y_\zeta, \quad E[\Psi_\theta] = \Omega_\zeta, \quad E[\Gamma_\zeta] = \Phi_\zeta$$

De todo ello se tiene que $\hat{\zeta} \xrightarrow{D} N_{k+1}[\zeta; I(\zeta)^{-1}]$. Además, aplicando el método delta, para

una función g -paramétrica $g(\zeta)$ ($g \leq k + 1$) se verifica que

$$g(\bar{\zeta}) \rightarrow N_{\Pi} [g(\zeta); \nabla g(\zeta)^T I(\zeta)^{-1} \nabla g(\zeta)]$$

donde $\nabla g(\zeta)$ es el vector de las derivadas parciales de $g(\zeta)$ con respecto a ζ .

Los elementos de la diagonal de la matriz $I(\zeta)^{-1}$ proporcionan varianzas asintóticas para las estimaciones de los parámetros, mientras que el método delta proporciona la matriz de covarianza asintótica para $g(\hat{\zeta})$ y, por consiguiente, los elementos de la diagonal son las varianzas asintóticas para la estimación de cada función paramétrica de $g(\hat{\zeta})$. Por ejemplo, si consideramos $g(\zeta) = G_{\zeta}^{\lambda}(t | y, \tau)$, que es la expresión general expresión para las principales características del proceso dada por la ecuación 2.1, entonces

$$\nabla g(\zeta) = g(\zeta) \left(\lambda_1 \frac{\partial H_{\zeta}(\tau, t)}{\partial \theta^T}, (t - \tau) \left[-\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_3 \sigma_0^2 + \sigma^2 (t - \tau))^{\lambda_4 - 1} \right] \right)$$

3.3. El proceso de difusión tipo-Gompertz

El objetivo de la introducción del proceso de difusión tipo Gompertz es la obtención del modelo estocástico continuo asociado a la curva Gompertz cuyo valor límite depende del valor inicial. Esta curva viene expresada como sigue:

$$f(t) = x_0 \exp \left(-\frac{m}{\beta} \left(e^{-\beta t} - e^{-\beta t_0} \right) \right), t \geq t_0 \geq 0, m, \beta > 0 \text{ y } x_0 > 0,$$

donde se consideró el proceso de difusión lognormal no homogéneo con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = m e^{-\beta t} x$$

$$A_2(x) = \sigma^2 x^2.$$

Consideramos ahora la siguiente reparametrización:

$$\theta = (\delta, \alpha)^T = (m/\beta, e^{-\beta})^T$$

Así, la curva Gompertz se transforma en

$$f_{\theta}(t) = x_0 \exp(-\delta(\alpha^t - \alpha^{t_0}))$$

donde

$$A_1(x, t) = m e^{-\beta t} x$$

$$A_2(x) = \sigma^2 x^2$$

$$h_{\theta}(t) = -\delta \alpha^t \log \alpha.$$

Utilizando la siguiente notación

$$\varphi_{i,j+1,j}^{\alpha} = \alpha^{t_{i,j+1}} - \alpha^{t_{i,j}}$$

$$\omega_{i,j+1,j}^{\alpha} = t_{i,j+1} \alpha^{t_{i,j+1}} - t_{i,j} \alpha^{t_{i,j}}$$

se tiene que

$$m_{\xi}^{i,j+1,j} = -\delta \varphi_{i,j+1,j}^{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2} \Delta_i^{j+1,j}$$

y que

$$\frac{\partial m_{\xi}^{i,j+1,j}}{\partial \theta^T} = -(\varphi_{i,j+1,j}^{\alpha}, \delta \omega_{i,j+1,j}^{\alpha}).$$

Así, a partir de la ecuación (3.5), y teniendo en cuenta la ecuación (3.4), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$X_1^{\alpha} + \delta X_2^{\alpha} + \frac{\sigma^2}{2} X_3^{\alpha} = 0$$

$$X_4^{\alpha} + \delta X_5^{\alpha} + \frac{\sigma^2}{2} X_6^{\alpha} = 0$$

donde

$$X_1^{\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{v_{ij} \varphi_{i,j+1,j}^{\alpha}}{(\Delta_i^{j+1,j})^{1/2}}, \quad X_2^{\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{(\varphi_{i,j+1,j}^{\alpha})^2}{\Delta_i^{j+1,j}}, \quad X_3^{\alpha} = \sum_{i=1}^d \varphi_{i,n_i,1}^{\alpha}$$

$$X_4^{\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{v_{ij} \omega_{i,j+1,j}^{\alpha}}{(\Delta_i^{j+1,j})^{1/2}}, \quad X_5^{\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{\varphi_{i,j+1,j}^{\alpha} \omega_{i,j+1,j}^{\alpha}}{\Delta_i^{j+1,j}}, \quad X_6^{\alpha} = \sum_{i=1}^d \omega_{i,n_i,1}^{\alpha}.$$

Tras unas operaciones y agrupaciones, se tiene que

$$\delta^\alpha = \frac{X_3^\alpha X_4^\alpha - X_1^\alpha X_6^\alpha}{X_2^\alpha X_6^\alpha - X_3^\alpha X_5^\alpha}$$

y

$$\sigma_\alpha^2 = 2S^\alpha,$$

donde

$$S^\alpha = \frac{X_1^\alpha X_5^\alpha - X_2^\alpha X_4^\alpha}{X_2^\alpha X_6^\alpha - X_3^\alpha X_5^\alpha}.$$

Por otro lado, y dado que

$$\Phi_\zeta = \delta^2 X_2^\alpha + \frac{\sigma^4}{4} Z_3 + \delta \sigma^2 X_3^\alpha, \quad \Gamma_\xi = -\delta X_1^\alpha - \frac{\sigma^2}{2} Z_2, \quad Y_\xi = -\delta X_3^\alpha - \frac{\sigma^2}{2} Z_3,$$

de la ecuación (3.6) resulta que

$$S^\alpha [2n + S^\alpha] - \delta^\alpha [2X_1^\alpha + \delta^\alpha X_2^\alpha] - Z_1 = 0. \quad (3.7)$$

La solución de esta ecuación anterior proporciona la estimación de α , mientras que las de los demás parámetros vienen dadas por $\delta^{\hat{\alpha}}$ y $\sigma_{\hat{\alpha}}^2$.

En cuanto a la distribución asintótica de $\hat{\zeta}$, es una distribución normal trivariada con media ζ y matriz de covarianza dada por $I(\zeta)^{-1}$, siendo esta la siguiente matriz:

$$I(\zeta) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} X_2^\alpha & \delta X_5^\alpha & -X_3^\alpha \\ \delta X_5^\alpha & \delta^2 X_7^\alpha & -\delta X_6^\alpha \\ -X_3^\alpha & -\delta X_6^\alpha & \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{Z_3}{4} \end{pmatrix}$$

con

$$X_7^\alpha = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{(\omega_{i,j+1,j}^\alpha)^2}{\Delta_i^{j+1,j}}.$$

Esta distribución puede utilizarse para obtener los errores estándar asintóticos para la estimación de los parámetros, así como para algunas funciones paramétricas de interés. En particular,

nos centramos en el tiempo de inflexión y en el correspondiente valor esperado del proceso en ese instante, condicionado a $X(t_0) = x_0$. Otra función paramétrica importante es el límite superior que determina la capacidad de carga del sistema modelado por el proceso. Concretamente:

- Límite superior, condicionado a $X(t_0) = x_0$, $g_1(\boldsymbol{\theta}) = x_0 \exp(\delta \alpha^{t_0})$.
- Tiempo de inflexión, $g_2(\boldsymbol{\theta}) = -\ln \delta / \ln \alpha$.
- Valor del proceso en el momento de la inflexión, condicionado a $X(t_0) = x_0$, $g_3(\boldsymbol{\theta}) = g_1(\boldsymbol{\theta})/e$.

Asimismo, cuando se utiliza el modelo con fines de predicción, algunas de las funciones paramétricas de la Tabla 2.1 pueden ser utilizadas. En particular, la función media condicionada adopta la expresión:

$$E[X(t) | X(\tau) = y] = g_4(\boldsymbol{\theta}) = y \exp(-\delta(\alpha^t - \alpha^\tau)).$$

Para finalizar, notar que esta curva es del tipo de la ecuación

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(t) = x_0 \exp(-\delta(\alpha^t - \alpha^{t_0})).$$

Por ello, esta función es útil para realizar predicciones. En este caso, interesa proporcionar no sólo el valor de la función en cada instante de tiempo, sino también el error estándar de la predicción y un intervalo de confianza que determine un rango de valores que incluya, con un nivel de confianza dado, el verdadero valor real de la predicción.

3.3.1. Aplicación a datos reales

El ejemplo que vamos a desarrollar a continuación trata sobre un estudio sobre algunos aspectos relacionados con el crecimiento de una población de conejos, en particular de 29 conejos durante 30 semanas. En la figura 3.1 se muestra el peso de estos conejos, en gramos, a lo largo de las 30 semanas.

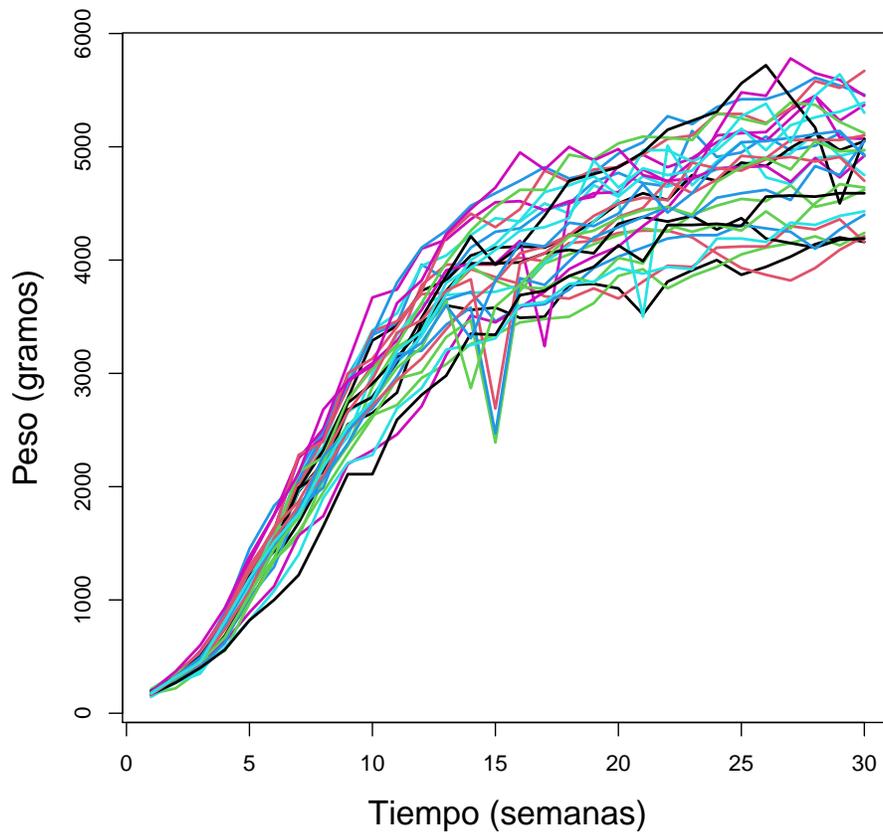


Figura 3.1: Peso de los conejos a lo largo del tiempo.

Como se puede observar, todos ellos no parten de un mismo peso inicial, y, además, su peso final tras las 30 semanas no es el mismo, por lo que sus límites dependen de los valores iniciales. Si nos fijamos en la trayectoria que sigue, podemos intuir un comportamiento sigmoide², por lo que, teniendo asimismo en cuenta esto, podemos utilizar el modelo tipo-Gompertz anteriormente introducido.

La estimación de los parámetros se ha realizado a partir de la resolución de la ecuación (3.7)

²Muchos procesos naturales y curvas de aprendizaje de sistemas complejos muestran una progresión temporal desde unos niveles bajos al inicio, hasta acercarse a un clímax transcurrido un cierto tiempo. La transición se produce en una región caracterizada por una fuerte aceleración intermedia. La función sigmoide permite describir esta evolución. Su gráfica tiene una típica forma de S. A menudo la función sigmoide se refiere al caso particular de la función logística.

mediante el método de bisección³. Así, se tiene la siguiente figura (3.2), en la que se muestra lo anteriormente descrito.

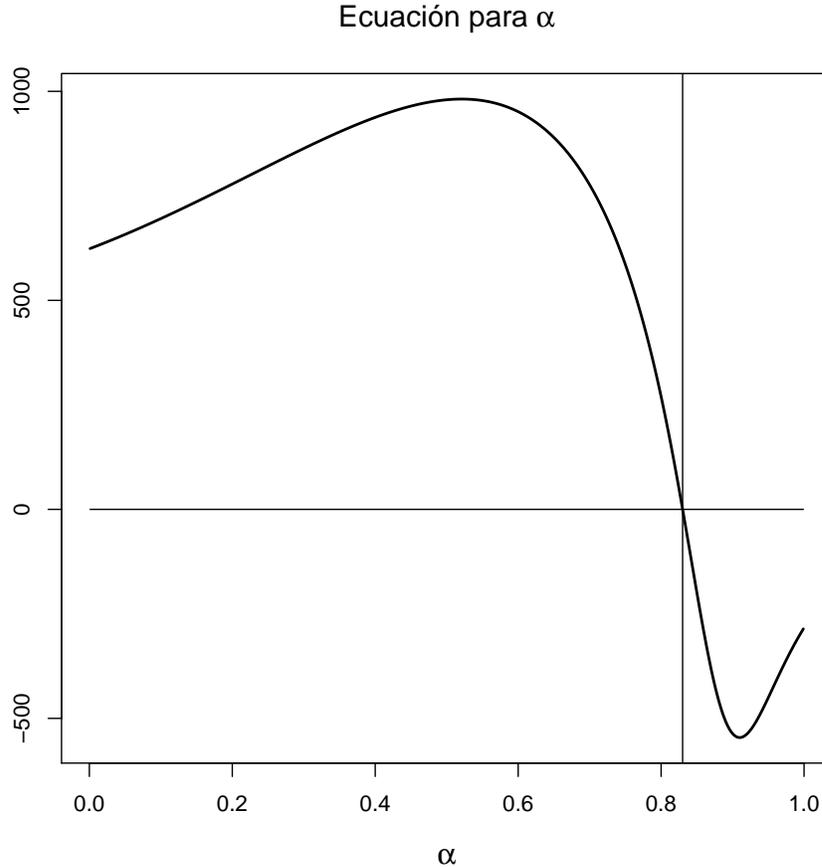


Figura 3.2: Ecuación para α . Solución por el método de bisección.

La tabla siguiente (3.1) contiene los valores estimados para los parámetros y el tiempo de inflexión, así como el error de estimación asintótica y los intervalos de confianza del 95 %

³El método de bisección en matemáticas es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el subintervalo que tiene la raíz.

Es uno de los métodos más sencillos para resolver ecuaciones en una variable. Se basa en el teorema del valor intermedio (TVI), el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es que todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es la imagen de al menos un valor en el intervalo $[a, b]$. En caso de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, el valor cero sería un valor intermedio entre $f(j)$ y $f(e)$, por lo que existe un p en $[a, b]$ que cumple $f(p) = 0$. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación $f(a) = 0$

aplicando el método delta.

Función paramétrica	δ	α	σ	$g_2(\theta)$
Valor estimado	4.10208816	0.83010453	0.07089173	7.58039
Error estándar	0.0556885943	0.0021584657	0.0002452425	0.1053
Intervalo de confianza	(3.9929, 4.1063)	(0.8259, 0.8343)	(0.0704, 0.0714)	(7.3739, 7.7869)

Tabla 3.1: Tabla con los valores estimados, errores estándar e intervalos de confianza del 95 % de los parámetros y del tiempo de inflexión.

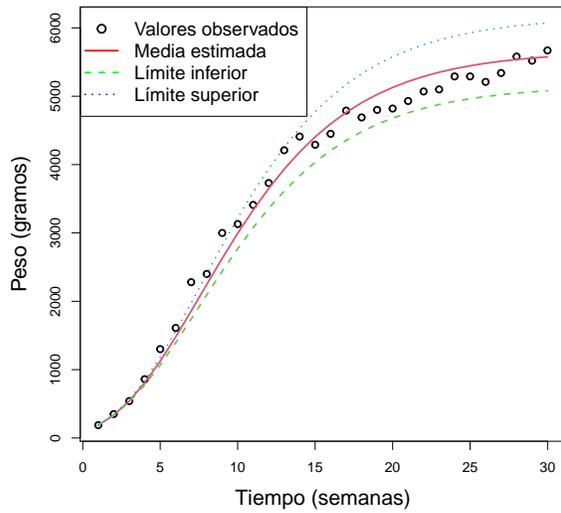
En cuanto al valor del peso en el momento de inflexión y el límite superior, ya hemos destacado anteriormente que estos valores dependen del observado en el instante inicial. Teniendo en cuenta el rango de valores de peso observados en el instante inicial de observación, se han considerado varios valores dentro de este rango. Para estos valores, se ha estudiado el peso esperado de un conejo en el instante de inflexión, así como el posible valor del peso máximo (límite superior). La tabla siguiente (3.2) contiene los valores estimados valores estimados, los errores estándar asintóticos y los intervalos de confianza del 95 %.

Peso inicial	Límite superior			Valor en el momento de la inflexión		
	$g_3(\hat{\theta})$	Error est.	Intervalo al 95 %	$g_1(\hat{\theta})$	Error est.	Intervalo al 95 %
145	1772.836	70.546	(1634.568, 1911.104)	4819.068	191.764	(4443.215, 5194.920)
155	1772.836	75.411	(1625.032, 1920.640)	4819.068	204.990	(4417.295, 5220.841)
165	1883.638	80.276	(1726.298, 2040.978)	5120.260	218.215	(4692.566, 5547.954)
175	2105.243	85.142	(1938.367, 2272.118)	5722.643	231.440	(5269.028, 6176.258)
185	2216.045	90.007	(2039.634, 2392.456)	6023.835	244.665	(5544.299, 6503.371)
195	2216.045	94.872	(2030.098, 2401.992)	6023.835	257.890	(5518.378, 6529.291)
205	2105.243	99.737	(1909.760, 2300.726)	5722.643	271.115	(5191.266, 6254.020)
215	1883.638	104.603	(1678.620, 2088.657)	5120.260	284.341	(4562.961, 5677.558)

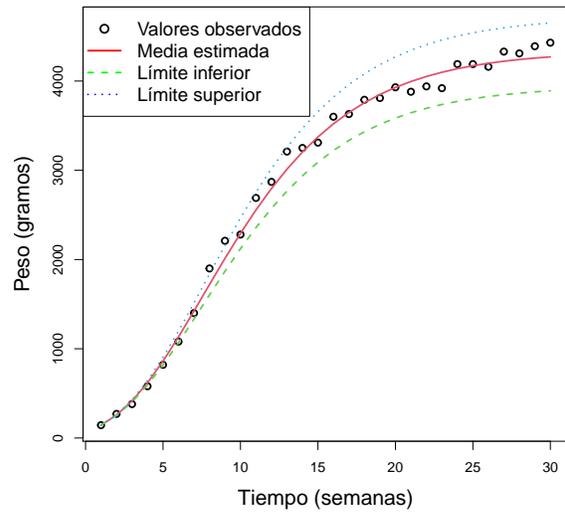
Tabla 3.2: Valores estimados, errores estándar e intervalos de confianza del 95 % del límite superior y del valor en el tiempo de inflexión para varios valores del peso inicial.

La función $E[X(t) | X(t_0) = x_0]$ puede utilizarse para proporcionar previsiones del peso de un conejo que presenta un peso inicial x_0 . La figura siguiente muestra, para una selección de cuatro de los conejos utilizados en el estudio, la función media estimada junto con los intervalos de confianza asintóticos del 95 % obtenidos para cada valor de esta función. Además, se incluyen

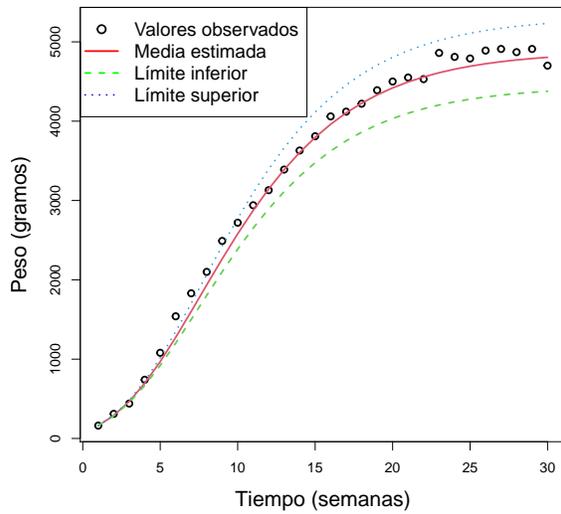
los valores observados para comprobar la calidad del ajuste realizado por el modelo considerado. Evidentemente, este tipo de representación también se puede obtenerse considerando cualquier valor de x_0 en el rango de la distribución inicial del peso. Nótese que las funciones medias estimadas para cada conejo dependen del valor inicial, así como los correspondientes intervalos de confianza para la media en cada instante de tiempo. Por lo tanto, los gráficos de la figura son diferentes para cada conejo aunque la estimación de los parámetros sea única.



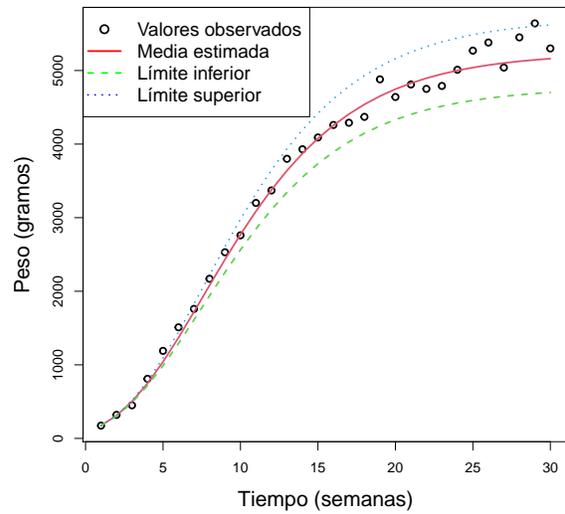
(a) Conejo 14.



(b) Conejo 23.



(c) Conejo 26.



(d) Conejo 29.

Figura 3.3: Valores observados, función media estimada e intervalos de confianza para los cuatro conejos elegidos.

Bibliografía

- [1] **Francisco de Asís Torres Ruiz.** (2021). *Apuntes de la asignatura Cálculo y Modelización Estocástica. Procesos de Difusión. Algunos aspectos sobre la teoría general de procesos estocásticos. Procesos Gaussianos.* Universidad de Granada.
- [2] **Francisco de Asís Torres Ruiz.** (2021). *Apuntes de la asignatura Cálculo y Modelización Estocástica. Procesos de Difusión. Procesos de difusión unidimensionales.* Universidad de Granada.
- [3] **Francisco de Asís Torres Ruiz.** (2021). *Apuntes de la asignatura Cálculo y Modelización Estocástica. Procesos de Difusión. Inferencia en procesos de difusión.* Universidad de Granada.
- [4] **Desirée Romero Molina.** (2021). *Apuntes de la asignatura Aplicación de los modelos de difusión. Estudio de problemas de inferencia a través de muestreo discreto de las trayectorias en los modelos planteados.* Universidad de Granada.
- [5] **Desirée Romero Molina.** (2021). *Apuntes de la asignatura Aplicación de los modelos de difusión. Estudio (obtención y características) de algunos de los procesos de difusión asociados al crecimiento.* Universidad de Granada.
- [6] **Pietro Caramuta, Emanuela Dolce.** *Teorema di Pawula.*
- [7] **I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod.** *Introduction to the theory of random processes.*
- [8] **Luigi M- Ricciardi.** (1977). *Lecture Notes in Biomathematics.* Springer-Verlag.

- [9] **Francisco Montes Suay.** (2007). *Procesos Estocásticos para Ingenieros: Teoría y Aplicaciones*. Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Universitat de València.
- [10] **Patricia Román-Román, Juan José Serrano-Pérez y Francisco Torres-Ruiz.** (2018). *Some Notes about Inference for the Lognormal Diffusion Process with Exogenous Factors*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.
- [11] **Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F.** (2010). *The nonhomogeneous lognormal diffusion process as a general process to model particular types of growth patterns*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada.
- [12] **Nuria Rico Castro.** (2005). *Aportaciones al estudio del proceso de difusión lognormal: Bandas de confianza aproximadas y generalizadas. Estudio del caso polinómico*. Granada.
- [13] **Francisco de Asís Torres Ruiz.** (2021). *Apuntes sobre la distribución Lognormal multivariante*. Universidad de Granada.
- [14] **J. L. Doob.** (1953). *Stochastics processes*, Wiley, New York.
- [15] **M. Loève.** (1963). *Probability theory*, 3rd ed., Van Nostrand, Princeton, NJ.
- [16] **I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod.** (1975). *Theory of random processes*, Vol III, Nauka, Moskow.
- [17] **N. V. Kryov.** (1996). *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*. Volume 142, American Mathematical Society, USA.