



Línea de Trabajo fin de Máster 2025-2026

Máster Universitario en Estadística Aplicada.	
Título	Procesos de difusión gaussianos en la modelización de fenómenos de crecimiento.
Tipo	INVESTIGACIÓN ☒ ORIENTACIÓN PRÁCTICA ☐
Número de alumnos admitidos	2
Profesor(es)/ email	Francisco de Asís Torres Ruiz. fdeasis@ugr.es
Descripción	Dentro de la Teoría de Procesos Estocásticos merece especial atención la clase de procesos Gaussianos, caracterizados porque las distribuciones finito-dimensionales son normales multivariantes, lo cual conlleva que gran parte de su estudio pueda enlazarse con los desarrollos propios de la distribución normal en el ámbito del Análisis Multivariante. Además, hay que tener en cuenta que un buen número de procesos estocásticos de gran importancia teórica-práctica pertenecen a esta clase. Tal es el caso del Proceso Wiener (que modeliza el movimiento Browniano), el Ornstein-Uhlenbeck o el proceso puente Browniano. Por otro lado, la clase de procesos de Markov juega un papel fundamental en la Teoría de Procesos, siendo quizás la clase más profundamente estudiada y considerada tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. Si consideramos procesos de este tipo, y les exigimos ser en tiempo continuo, tomar valores en un espacio continuo y tener trayectorias continuas casi seguro, la clase resultante se denomina la clase de Procesos de Difusión. Sobre la clase de los procesos de difusión existe una extensa y profunda base teórica, si bien es más de destacar el amplísimo abanico de campos de aplicación donde estos procesos son aplicados: Economía, Biología, Epidemiología, explotación de recursos naturales... En los últimos años ha adquirido especial importancia la descripción y análisis de sistemas dinámicos asociados a fenómenos regidos por curvas de crecimiento, ámbito donde los procesos de

	difusión han mostrado una gran utilidad. De esta forma han aparecido numerosos modelos basados en este tipo de procesos y que permiten modelizar este tipo de comportamientos. En este trabajo consideraremos el estudio de la subclase de procesos de difusión caracterizados porque sus distribuciones finito-dimensionales sean normales, es decir, procesos de difusión gaussianos. En consecuencia, en primer lugar, el alumno hará un resumen de las principales propiedades que caracterizan a la clase de procesos gaussianos. Posteriormente analizará las conexiones existentes entre procesos gaussianos y markovianos para, finalmente, estudiar las condiciones bajo las cuales este tipo de procesos son también difusiones. Se completará el trabajo con ejemplos de aplicación práctica (por lo tanto, también se estudiará la inferencia en estos procesos) bien sea bajo simulaciones o con el uso de datos reales.
Objetivos particulares	• Estudio de las caracterizaciones de procesos gaussianos y análisis de las principales características. • Relación de los procesos gaussianos con otras clases de procesos: markovianos y procesos de difusión. • Estudio de los procesos de Wiener, Ornstein-Uhlenbeck y Puente Browniano. • Bases inferenciales en estos procesos. Ejemplo de aplicación.
Prerrequisitos y recomendaciones	Para realizar este trabajo es indispensable haber cursado la asignatura Cálculo y modelización estocástica. Procesos de difusión del Módulo I de Docencia del Máster. En otro caso, el alumno deberá estudiar el contenido de dicho curso para la realización del trabajo.
Plan de trabajo	• Realización de un resumen sobre la teoría de procesos gaussianos. • Conexiones entre los procesos gaussianos y markovianos. Estudiar las condiciones bajo las cuales un proceso gaussiano es un proceso de difusión. • Modelización de fenómenos dinámicos por procesos de difusión gaussianos. Ejemplos de aplicación a partir de procesos tipo Ornstein-Uhlenbeck. • Simulación de trayectorias y aplicaciones a datos reales y/o simulados.

Competencias generales y específicas	• Básicas: CB6 a CB10. • Generales: CG1 a CG10. • Específicas: CE3; CE4; CE5; CE10; CE12; CE13; CE15; CE17; CE22; CE24; CE26; CE29.
Bibliografía	• Albano, G.; Barrera, A.; Giorno, V.; Torres-Ruiz, P. (2025). Inference on diffusion processes related to a general growth model. <i>Statistics and Computing</i>, 35:52. • Albano, G.; Barrera, A.; Giorno, V.; Román-Román, P.; Torres-Ruiz, P. (2023). First Passage and First Exit Times for diffusion processes related to a general growth curve. <i>Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation</i>, 126, 107494. • Albano, G.; Giorno, V.; Román-Román, P.; Torres-Ruiz, P. (2022). Study of a general growth model. <i>Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation</i>, 106100. • Barrera, A.; Román-Román, P.; Serrano-Pérez, J.J.; Torres-Ruiz, F. (2021). Two multi-sigmoidal diffusion models for the study of the evolution of the COVID-19 pandemic. <i>Mathematics</i>, 9(19), 2049. • Barrera-García, A.J., Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F. (2020). Two stochastic differential equations for modeling oscillabolastic-type behavior. <i>Mathematics</i>, 8(2), 155. • Bhattacharya, R.N. y Waymire, E. C. Stochastic Processes with Applications. John Wiley and Sons, 1990. • Gutiérrez, R. y González, A. Estadística Multivariable. Introducción al Análisis Multivariante. Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias. Universidad de Granada, 1992. • Román Román, P., Serrano Pérez, J.J. y Torres Ruiz, F. (2018). Some notes about inference for the lognormal diffusion process with exogenous factors. <i>Mathematics</i>, 6(5), 85. • Todorovic, P. An introduction to Stochastic Processes and their Applications. Springer-Verlag, 1992.